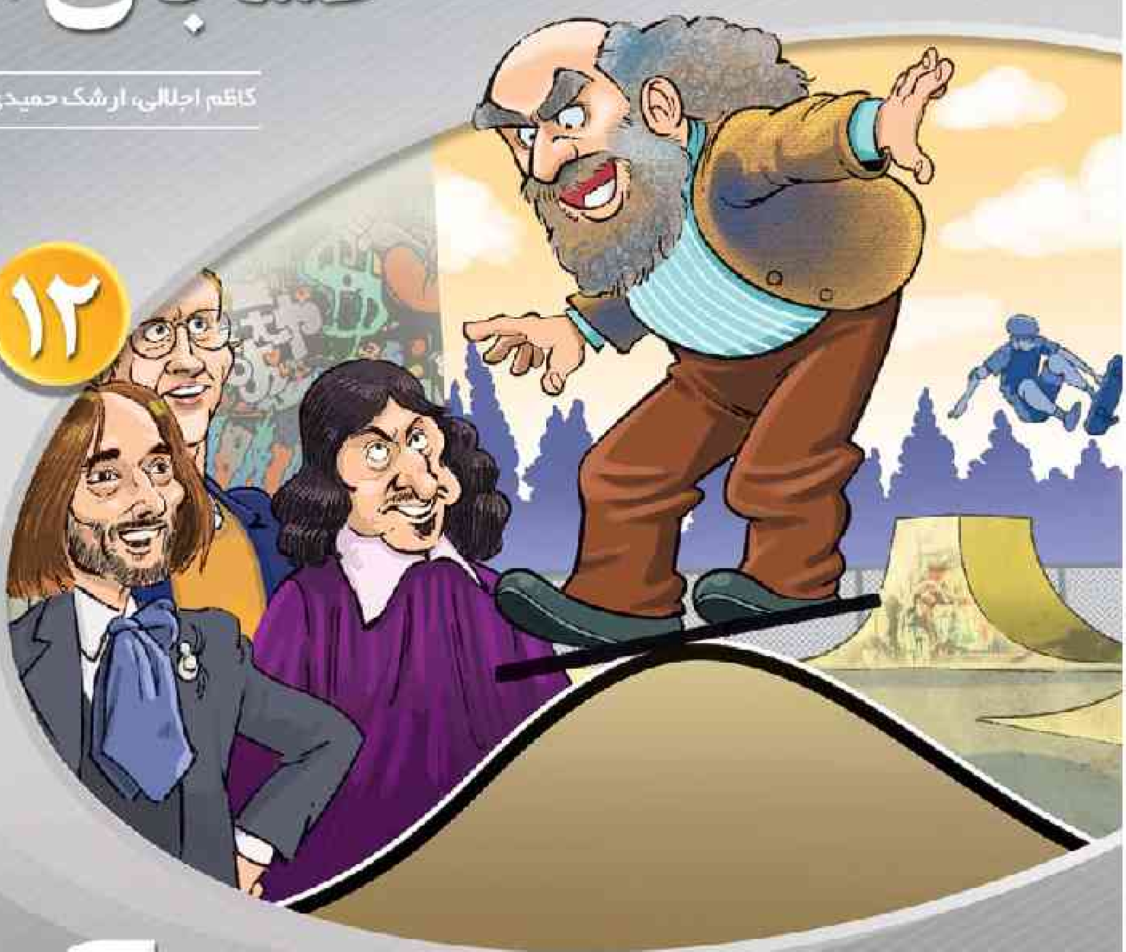
کتاب‌های سه‌بعدی

آموزش کامل + تمرین + پرسش‌های چهارگزینه‌ای

حسابان ۲

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی

۱۲



نشر الگو

مقدمه

به نام خدا

این کتاب را براساس محتوای حسابان۲ سال دوازدهم و با هدف آموزش عمیق‌تر مفاهیم درسی نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است. به همین دلیل، تقریباً همه‌جا چارچوب‌های کتاب درسی را رعایت کرده‌ایم، هر چند که مواردی هم هست که برای بیان دقیق‌تر مفاهیم و درک بهتر آنها پا را کمی فراتر گذاشته‌ایم.

هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است. در هر درس مفاهیم اصلی را با بیانی روشن و با آوردن مثال‌هایی متنوع معرفی کرده‌ایم و با حل کردن مسئله‌ها و تست‌هایی که به دقت انتخاب شده‌اند، روش‌های استفاده از آنها را در حل مسئله، آموزش داده‌ایم. آموختن ریاضیات بدون تمرین و تکرار، نشدنی است. بنابراین، در انتهای هر درس در دو بخش «تمرین» و «پرسش‌های چهارگزینه‌ای» تعداد زیادی مسئله و تست آورده‌ایم.

راه‌حل همهٔ تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای را در انتهای هر فصل آورده‌ایم. بهتر است پیش از حل کردن تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای، مسئله‌ها و تست‌های حل شده در متن درس را کامل بخوانید.

وظیفهٔ خود می‌دانیم که از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها مهدیه جمشیدی و عاطفه ربیعی برای مطالعه و ویرایش کتاب، سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو و همچنین از آقای آریس آقانیانس برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

مؤلفان

فهرست

فصل اول

تابع

فصل اول

درس اول: تبدیل نمودار توابع

رسم نمودار به کمک نمودارهای دیگر

می‌توانیم نمودار برخی تابع‌ها را از روی نمودار تابع‌های دیگر رسم کنیم.

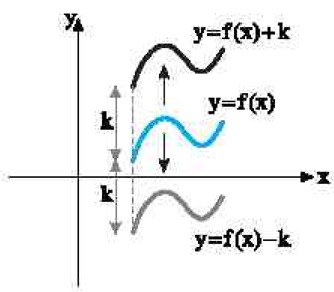
انتقال عمودی

فرض کنید نمودار تابع f را داریم، k عددی حقیقی است و $k>0$.

برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+k$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد به بالا منتقل کنیم.

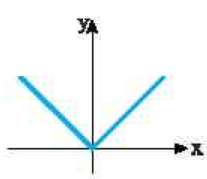
برای رسم نمودار تابع $y=f(x)-k$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد به پایین منتقل کنیم.

بنابراین نقطهٔ (x_0, y_0+k) از نمودار تابع $y=f(x)+k$ متناظر با نقطهٔ (x_0, y_0) از نمودار تابع $y=f(x)$ است.

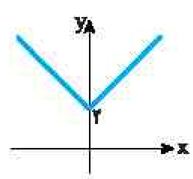


مثال: برای رسم نمودار تابع $f(x)=|x|+2$ به طریق زیر عمل می‌کنیم.

ابتدا نمودار تابع $y=|x|$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را ۲ واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم:



$y=|x|$

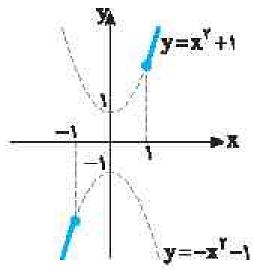


$f(x)=|x|+2$

مسئله ۱ نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x\geq ۱ \\ -x^{۲}-۱ & x\leq -۱ \end{cases}$$

راه‌حل ابتدا نمودار تابع‌های $y=x^{۲}+۱$ و $y=-x^{۲}-۱$ را رسم می‌کنیم، سپس قسمت‌هایی از آنها را که مربوط به بازه‌های دامنهٔ f هستند، انتخاب می‌کنیم. توجه کنید که نمودار $y=x^{۲}+۱$ از انتقال نمودار $y=x^{۲}$ به اندازهٔ یک واحد به بالا به‌دست آمده است. همچنین نمودار $y=-x^{۲}-۱$ از انتقال نمودار $y=-x^{۲}$ به اندازهٔ یک واحد به پایین به‌دست آمده است.



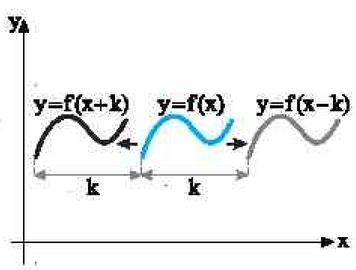
انتقال افقی

فرض کنید نمودار تابع f را داریم، k عددی حقیقی است و $k>۰$.

برای رسم نمودار تابع $y=f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد به سمت چپ منتقل کنیم.

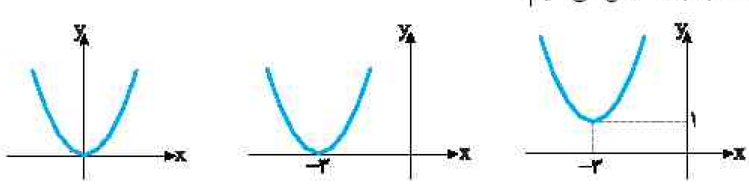
برای رسم نمودار تابع $y=f(x-k)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد به سمت راست منتقل کنیم.

بنابراین نقطهٔ $(x_{۰}-k\,,\,y_{۰})$ از نمودار تابع $y=f(x+k)$ متناظر با نقطهٔ $(x_{۰}\,,\,y_{۰})$ از نمودار تابع $y=f(x)$ است.



مسئله ۲ نمودار تابع $f(x)=x^{۲}+۶x+۱۰$ را رسم کنید.

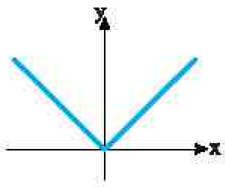
راه‌حل توجه کنید که $f(x)=(x+۳)^{۲}+۱$. بنابراین، ابتدا نمودار $y=x^{۲}$ را رسم کرده، سپس آن را ۳ واحد به سمت چپ و یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم.

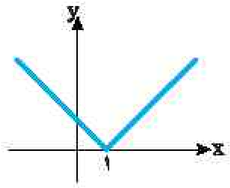


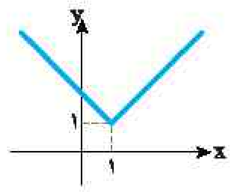
$y=x^{۲}$ $\qquad$ $y=(x+۳)^{۲}$ $\qquad$ $f(x)=(x+۳)^{۲}+۱$

مسئله ۳ نمودار تابع $f(x)=|x-۱|+۱$ را رسم کنید.

راه‌حل ابتدا نمودار $y=|x|$ را رسم می‌کنیم. سپس این نمودار را ۱ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار $y=|x-۱|$ به‌دست بیاید و در نهایت این نمودار را ۱ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع f به‌دست بیاید.

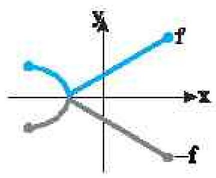




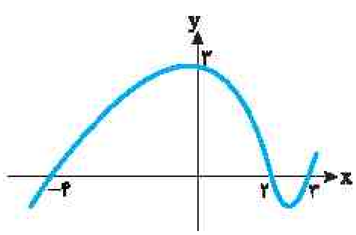


رسم نمودار تابع $y=-f(x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$

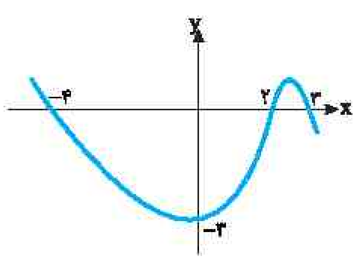
نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-f(x)$ قرینهٔ نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ نسبت به محور x است. بنابراین نقطهٔ $(x_۰, -y_۰)$ از نمودار تابع $y=-f(x)$ متناظر با نقطهٔ $(x_۰, y_۰)$ از نمودار تابع $y=f(x)$ است.



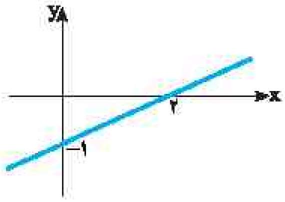
مسئله ۴ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y=-f(x)$ را رسم کنید.



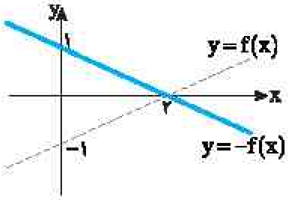
راه‌حل باید قرینهٔ نمودار را نسبت به محور x رسم کنیم تا نمودار تابع $y=-f(x)$ به‌دست بیاید.



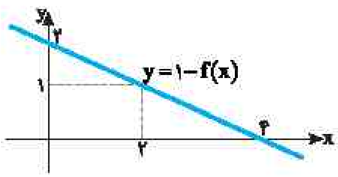
مسئله ۵ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=1-f(x)$ را رسم کنید.



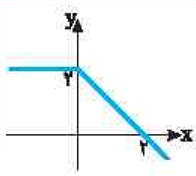
راه‌حل: ابتدا نمودار داده شده را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(x)$ به‌دست بیاید.



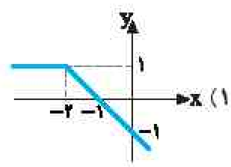
سپس، نمودار به‌دست آمده را ۱ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=1-f(x)$ به‌دست بیاید.



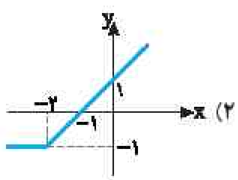
تست ۱ نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار تابع $y=1-f(x+2)$ کدام است؟



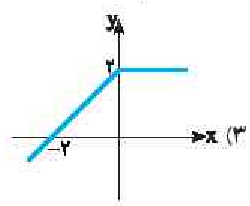
۱)



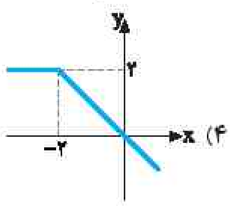
۲)



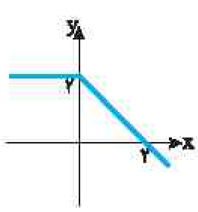
۳)



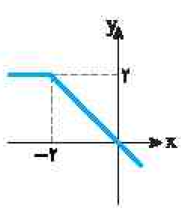
۴)



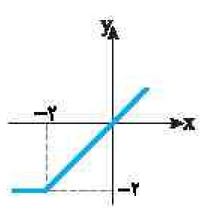
راه‌حل: ابتدا نمودار $y=f(x)$ را ۲ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار $y=f(x+2)$ به‌دست بیاید. سپس این نمودار را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-f(x+2)$ به‌دست بیاید. در آخر، این نمودار را ۱ واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار $y=1-f(x+2)$ به‌دست بیاید.



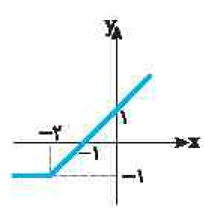
$y=f(x)$



$y=f(x+2)$

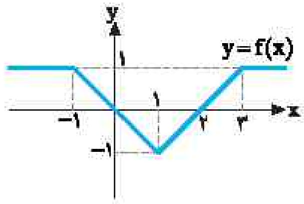


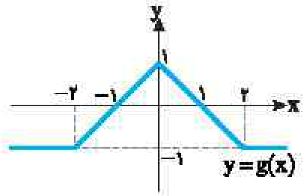
$y=-f(x+2)$



$y=1-f(x+2)$

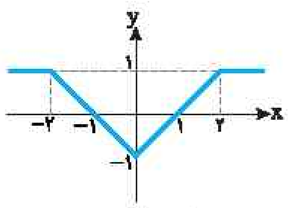
تست ۲ نمودار تابع‌های f و g در شکل‌های زیر رسم شده است. تابع g کدام تابع است؟



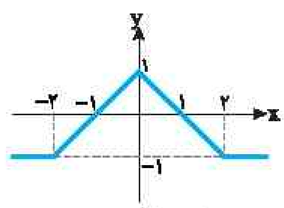


۱) $y=-f(x+1)$ ۲) $y=-f(x)+1$ ۳) $y=-f(x-1)$ ۴) $y=-f(x)-1$

راه‌حل ابتــدا توجــه کنید که اگر نمودار تابع f را ۱ واحد به ســمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x+1)$ به‌دســت می‌آید. اکنون اگر قرینهٔ این نمودار را نســبت به محور x رســم کنیم، نمودار تابع g به‌دســت می‌آید. بنابراین $g(x)=-f(x+1)$.



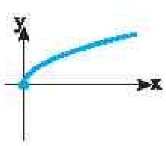
$y=f(x+1)$



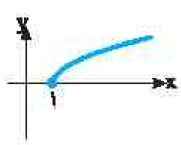
$y=-f(x+1)$

مسئله ۶ نمودار تابع $f(x)=1-\sqrt{x-1}$ را رسم کنید.

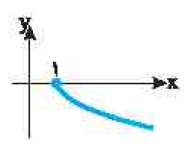
راه‌حل ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را رســم می‌کنیم. ســپس آن را یک واحد به ســمت راســت منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x-1}$ به‌دست آید. نمودار اخیر را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-\sqrt{x-1}$ به‌دست آید. اکنون این نمودار را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع f رسم شود.



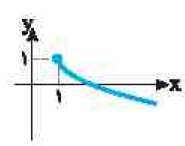
$y=\sqrt{x}$



$y=\sqrt{x-1}$



$y=-\sqrt{x-1}$



$f(x)=1-\sqrt{x-1}$

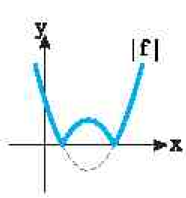
رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$

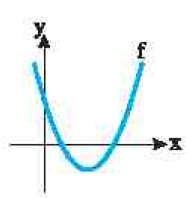
توجه کنید که

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & f(x)\geq 0 \\ -f(x) & f(x)<0 \end{cases}$$

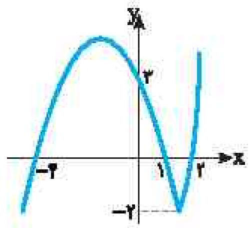
بنابرایــن نمــودار تابع $|f|$ به‌ازای xهایــی که $f(x)\geq 0$ همان نمودار تابع f اســت و به‌ازای xهایی که $f(x)<0$، قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به محور x است.

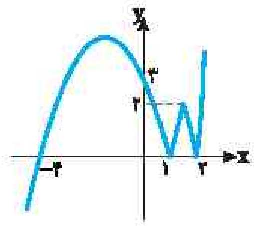
برای رســم نمــودار تابع بــا ضابطهٔ $y=|f(x)|$ از روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$، قرینهٔ قسمت‌هایی را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و این قسمت‌ها را حذف می‌کنیم.

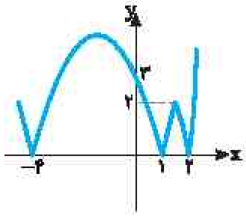


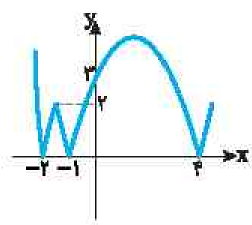


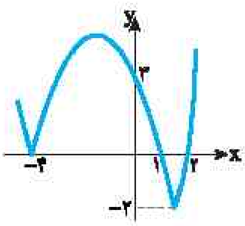
تست ۳ نمـودار تابـع f در شـکل مقابل رسـم شـده اسـت. نمـودار تابع $y=|f(x)|$ کدام است؟



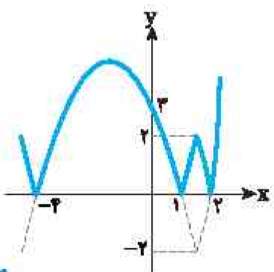
۱)


۲)


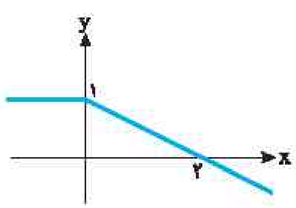
۳)


۴)


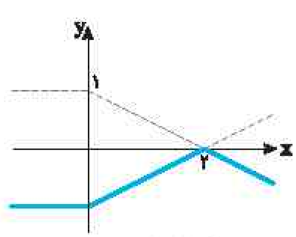
(راه‌حل) باید قرینهٔ قسـمتی از نمودار f را که زیر محور x است رسم کنیم، سپس این قسـمت را حذف کنیم. به این ترتیب نمودار گزینهٔ (۲) به‌دست می‌آید.



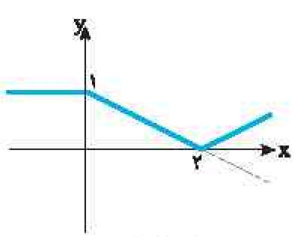
مسئله ۷ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=-|f(x)|$ را رسم کنید.



(راه‌حل) ابتدا قرینهٔ قسمتی از نمودار را که زیر محور x است رسم می‌کنیم، سپس قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|f(x)|$ به‌دسـت بیاید. سـپس قرینهٔ نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-|f(x)|$ به‌دست بیاید.

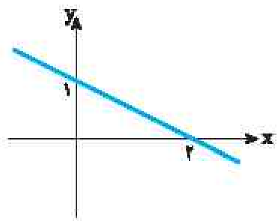


$y=-|f(x)|$

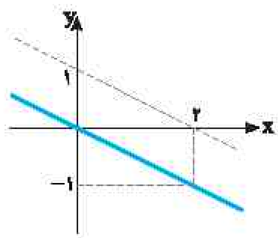


$y=|f(x)|$

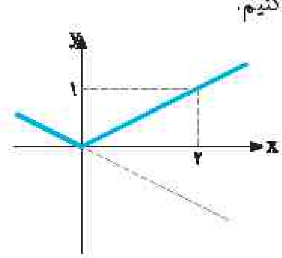
مسئله ۸ نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار تابع $y=|1-f(x)|$ را رسم کنید.



راه‌حل ابتدا توجه کنید که $y=|1-f(x)|=|f(x)-1|$. بنابراین ابتدا نمودار $y=f(x)-1$ را رسم می‌کنیم، سپس قرینهٔ قسمتی از آن را که زیر محور x است نسبت به محور x پیدا می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.



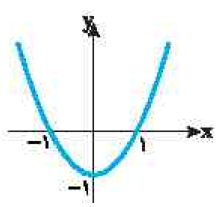
$y=f(x)-1$



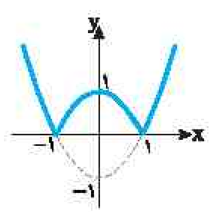
$y=|f(x)-1|$

مسئله ۹ نمودار تابع $f(x)=|x^2-1|$ را رسم کنید.

راه‌حل ابتدا نمودار $y=x^2-1$ را رسم می‌کنیم. سپس قرینهٔ قسمتی از آن را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع f به‌دست بیاید.



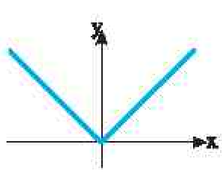
$y=x^2-1$



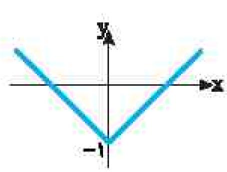
$f(x)=|x^2-1|$

مسئله ۱۰ نمودار تابع $f(x)=||x|-1|$ را رسم کنید.

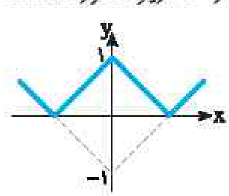
راه‌حل ابتدا نمودار تابع $y=|x|$ را رسم می‌کنیم، بعد ۱ واحد آن را پایین می‌آوریم تا نمودار $y=|x|-1$ به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x پیدا می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع f به‌دست بیاید.



$y=|x|$



$y=|x|-1$



$f(x)=||x|-1|$

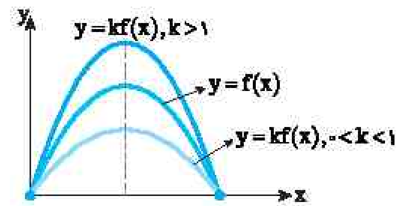
رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$

اگر k عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y=f(x)$ را k برابر کنیم. اگر $k>1$، نمودار تابع $y=kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید و اگر $0<k<1$، نمودار تابع $y=kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید.

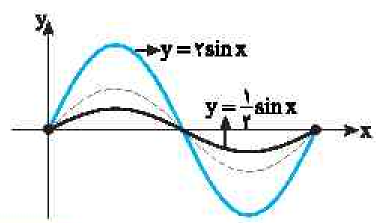
اگر k عددی منفی باشد، برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ کافی است ابتدا نمودار تابع $y=|k|f(x)$ را رسم کنیم، سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم کنیم.

دامنهٔ تابع $y=kf(x)$ همان دامنهٔ تابع f است ولی هر مقدار در برد تابع $y=kf(x)$، k برابر مقدار متناظرش در برد تابع f است.

نقطهٔ (x_0, ky_0) از نمودار تابع $y=kf(x)$ متناظر با نقطهٔ (x_0, y_0) از نمودار تابع $y=f(x)$ است.

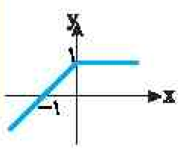


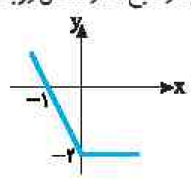
مثال: نمودار تابع‌های $y=\frac{1}{2}\sin x$ و $y=2\sin x$ را روی بازهٔ $[0, 2\pi]$ در شکل زیر رسم کرده‌ایم.

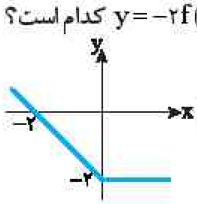


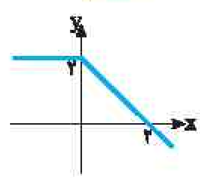
تست ۴

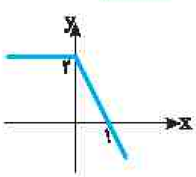
نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار تابع $y=-2f(x)$ کدام است؟



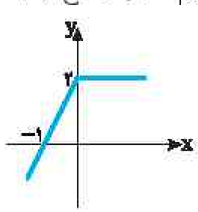
۱)


۲)


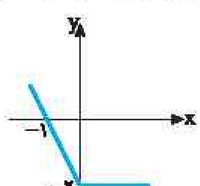
۳)


۴)


راه‌حل: ابتدا نمودار تابع $y=2f(x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y=f(x)$ را ۲ برابر می‌کنیم. سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-2f(x)$ به‌دست بیاید.



$y=2f(x)$

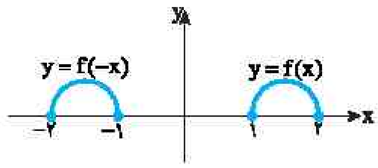


$y=-2f(x)$

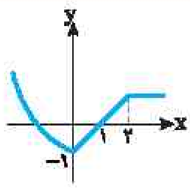
رسم نمودار تابع $y=f(-x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$

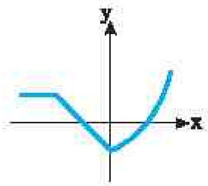
نمــودار تابع با ضابطــهٔ $y=f(-x)$ قرینهٔ نمــودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ نسبت به محور y است.

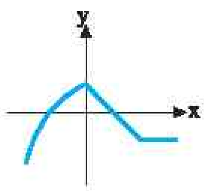
بنابرایــن نقطــهٔ $(-x_\circ, y_\circ)$ از نمــودار تابــع $y=f(-x)$ متناظر با نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ از نمودار تابع $y=f(x)$ است.

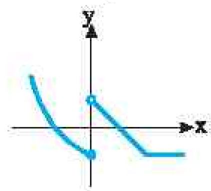


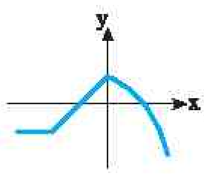
تست ۵ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(-x)$ کدام است؟



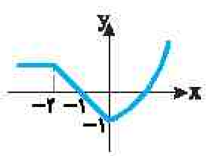
۱)


۲)


۳)


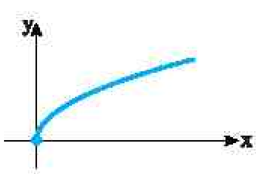
۴)


راه‌حل: برای اینکه نمودار تابع $y=f(-x)$ را رسم کنیم، باید قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور y رسم کنیم.

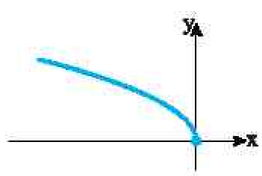


مسئله ۱۱ توضیح دهید نمودار تابع $f(x)=-\sqrt{-x}$ چگونه از روی نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به‌دست می‌آید.

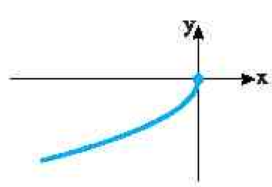
راه‌حل: ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را رســم می‌کنیم، ســپس قرینهٔ آن را نسبت به محور y رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{-x}$ به‌دست بیاید و در نهایت این نمودار را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع f به‌دست بیاید.



$y=\sqrt{x}$



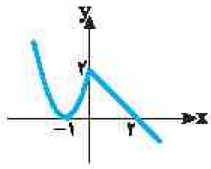
$y=\sqrt{-x}$



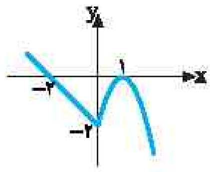
$f(x)=-\sqrt{-x}$

تست ۶

شکل (۱) نمودار تابع f است. شکل (۲) نمودار کدام تابع است؟



شکل (۱)



شکل (۲)

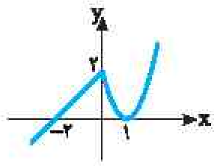
۱) $y=f(-x)$

۲) $y=-f(-x)$

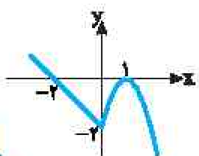
۳) $y=|f(x)|$

۴) $y=-f(x)$

راه‌حل برای اینکه نمودار تابع $y=f(-x)$ را به‌دست بیاوریم باید نمودار تابع f را نسبت به محور y قرینه کنیم، که می‌شود:

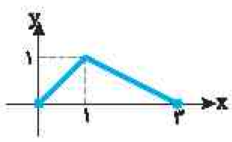


اکنون اگر این نمودار را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(-x)$ به‌دست می‌آید، که می‌شود:

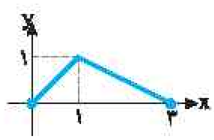


مسئله ۱۲

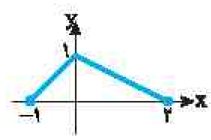
اگر نمودار تابع f به‌صورت مقابل باشد، نمودار تابع $g(x)=f(-x+1)$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.



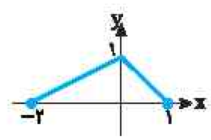
راه‌حل برای رسم نمودار تابع g ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم، سپس قرینهٔ آن را نسبت به محور y رسم می‌کنیم.



$y=f(x)$



$y=f(x+1)$



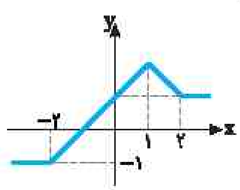
$g(x)=f(-x+1)$

با توجه به نمودار تابع g دامنه و برد آن به‌صورت زیر مشخص می‌شوند:

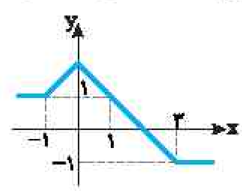
$D_g=[-2,1]\,,\quad R_g=[0,1]$

تست ۷

شکل (۱) نمودار تابع f است. شکل (۲) نمودار کدام تابع است؟



شکل (۱)



شکل (۲)

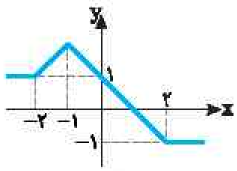
۱) $y=-f(x+1)$

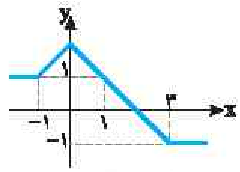
۲) $y=f(-x-1)$

۳) $y=-f(-x+1)$

۴) $y=f(-x+1)$

راه‌حل: اگر قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور y رسم کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آید. اکنون اگـر این نمودار را یک واحد به سـمت راسـت منتقل کنیـم، نمودار تابع $y=f(-(x-۱))=f(-x+۱)$ به‌دست می‌آید، که همان نمودار شکل (۲) است.


$y=f(-x)$


$y=f(-x+۱)$

رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$

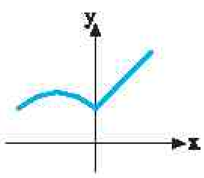
توجه کنید که

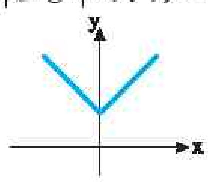
$$f(|x|)=\begin{cases} f(x) & x\geq ۰ \\ f(-x) & x<۰ \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع با ضابطهٔ زیر

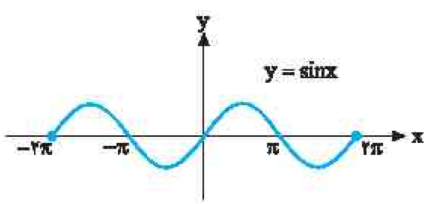
$$y=f(|x|)$$

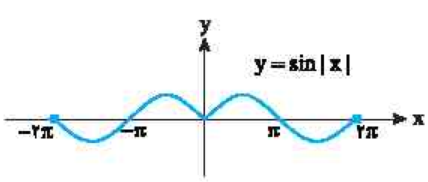
به‌ازای $x\geq ۰$ همان نمودار تابع f اسـت و به‌ازای $x<۰$ قرینهٔ قسـمتی از نمودار f است که سمت راست محور y اسـت. برای رسـم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(|x|)$ از روی نمـودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$، قسمتی از نمودار تابع f را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینهٔ قسمتی را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم می‌کنیم.


$y=f(x)$


$y=f(|x|)$

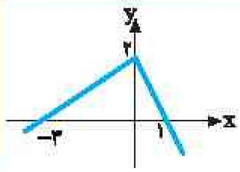
مثال: در شکل زیر نمودار تابع $y=\sin|x|$ را روی بازهٔ $[-۲\pi,۲\pi]$ رسم کرده‌ایم.

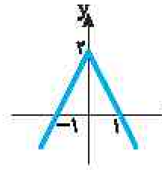


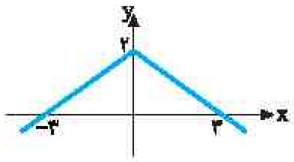


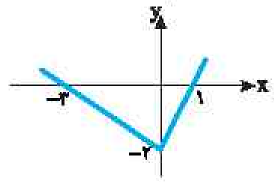
تست ۸

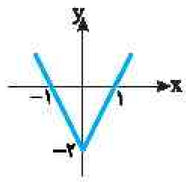
نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(|x|)$ کدام گزینه است؟



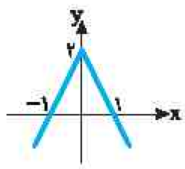
۱) 

۲) 

۳) 

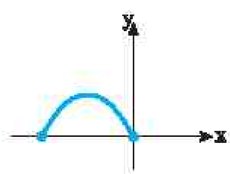
۴) 

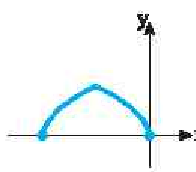
راه‌حل: برای رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$، قسمتی از نمودار f را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینهٔ قسمتی را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم می‌کنیم.

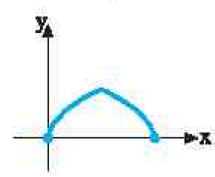


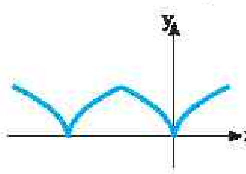
تست ۹

نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۱-|x+۱|}$ کدام است؟

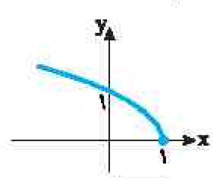
۱) 

۲) 

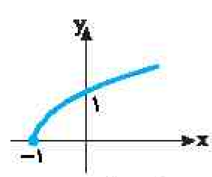
۳) 

۴) 

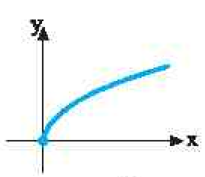
راه‌حل: مراحل رسم نمودار به شکل زیر است:



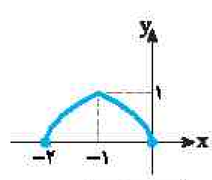
$y=\sqrt{۱-x}$



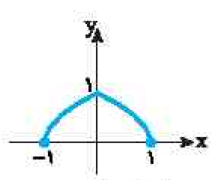
$y=\sqrt{۱+x}$



$y=\sqrt{x}$

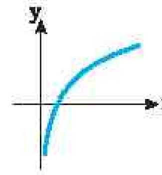


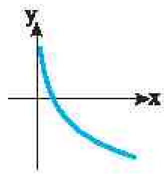
$y=\sqrt{۱-|x+۱|}$

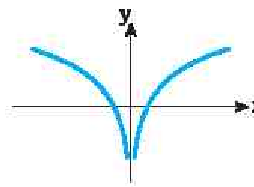


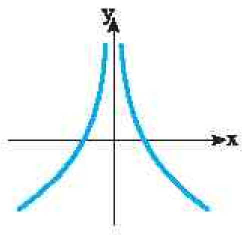
$y=\sqrt{۱-|x|}$

تست ۱۰ نمودار تابع $f(x)=\log(\frac{1}{x^2})$ کدام است؟

۱) 

۲) 

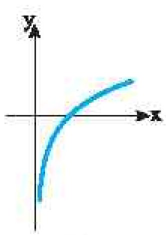
۳) 

۴) 

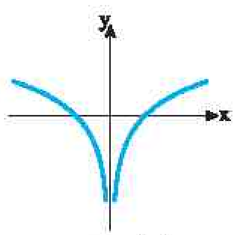
راه‌حل توجه کنید که

$$f(x)=\log(\frac{1}{x^2})=\log(\frac{1}{|x|^2})=\log|x|^{-2}=-2\log|x|$$

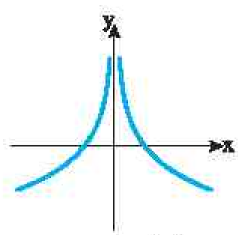
بنابراین ابتدا نمودار تابع $y=\log x$ را رسم می‌کنیم. سپس قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که سمت راست محور y است به این نمودار اضافه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\log|x|$ به‌دست بیاید (توجه کنید که هیچ قسمتی از نمودار تابع $y=\log x$ سمت چپ محور y نیست). اکنون این نمودار را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-\log|x|$ به‌دست بیاید. در آخر عرض هر نقطه روی این نمودار را ۲ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع f به‌دست بیاید.



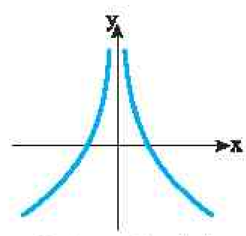
$y=\log x$



$y=\log|x|$



$y=-\log|x|$



$f(x)=-2\log|x|$

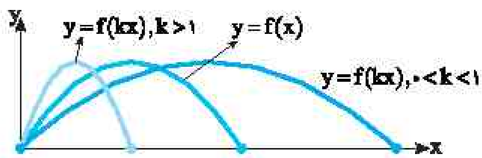
رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$

اگر k عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ کافی است طول هر نقطه روی نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

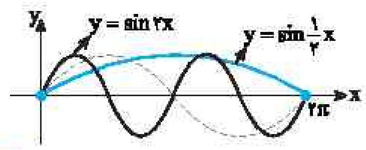
اگر k عددی مثبت باشد، نمودار تابع $y=f(kx)$ را می‌توان از روی نمودار تابع $y=f(x)$ با انبساط یا انقباض در امتداد محور x رسم کرد. اگر $0<k<1$، نمودار تابع $y=f(x)$ باید با ضریب $\frac{1}{k}$ در امتداد محور x منبسط شود و اگر $k>1$، نمودار تابع $y=f(x)$ باید با ضریب $\frac{1}{k}$ در امتداد محور x منقبض شود.

اگر k عددی منفی باشد، برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ کافی است نمودار تابع $y=f(|k|x)$ را رسم کنیم، سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور y رسم کنیم.

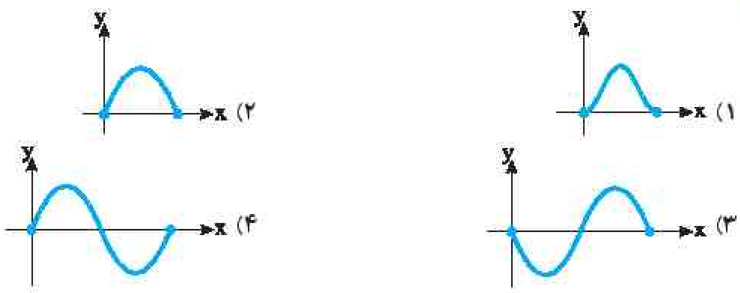
برد تابع $y=f(kx)$ همان برد تابع f اســت ولی هر عضو دامنهٔ تابع $y=f(kx)$، $\frac{1}{k}$ برابر عضو نظیرش در دامنهٔ تابع f است. نقطهٔ $(\frac{x_0}{k}, y_0)$ از نمودار تابع $y=f(kx)$ متناظر با نقطهٔ (x_0, y_0) از نمودار تابع $y=f(x)$ است.



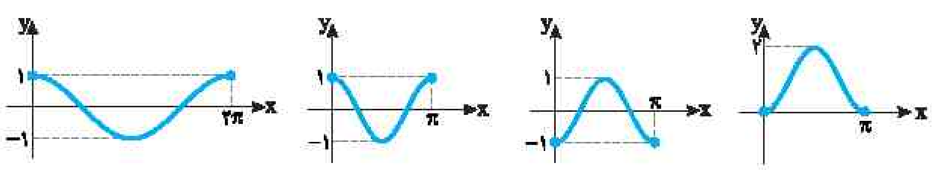
مثال: در شکل زیر نمودار تابع‌های $y=\sin 2x$ و $y=\sin\frac{1}{2}x$ را روی بازهٔ $[0, 2\pi]$ رسم کرده‌ایم.



تست ۱۱ نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=1-\cos 2x$ و دامنهٔ $[0,\pi]$ کدام است؟

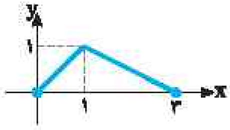


راه‌حل: ابتدا نمودار تابع $y=\cos 2x$ را روی بازهٔ $[0,\pi]$ رسـم می‌کنیم. برای این کار باید طول هر نقطه روی نمودار تابع $y=\cos x$ را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم. توجه کنید که باید $0\le \frac{1}{2}x \le \pi$، یعنی $0\le x\le 2\pi$. در نتیجه باید نمودار تابع $y=\cos x$ را روی بازهٔ $[0, 2\pi]$ رسم کنیم، سپس طول هر نقطه روی این نمودار را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم تا نمودار تابع $y=\cos 2x$ به‌دست بیاید. توجه کنید که با این کار نمودار تابع $y=\cos x$ در امتداد محور طول‌ها منقبض می‌شود. سپس نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-\cos 2x$ به‌دست بیاید. در آخر، این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع f به‌دست بیاید.

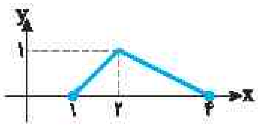


$y=\cos x$ $y=\cos 2x$ $y=-\cos 2x$ $f(x)=1-\cos 2x$

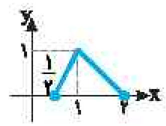
مسئله ۱۳ اگر نمودار تابع f به‌صورت مقابل باشد، نمودار تابع $g(x)=f(2x-1)$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.



راه‌حل ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-1)$ به‌دست آید، سپس طول هر نقطه روی نمودار به‌دست آمده را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع g به‌دست آید.



$y=f(x-1)$



$g(x)=f(2x-1)$

با توجه به نمودار تابع g می‌توان نوشت $D_g=[\frac{1}{2},2]$ و $R_g=[0,1]$.

مسئله ۱۴ توضیح دهید که چگونه با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$ می‌توان نمودار تابع $y=f(-2x+3)$ را رسم نمود.

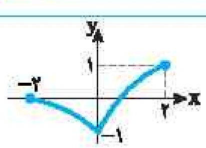
راه‌حل ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را سه واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x+3)$ به‌دست آید، سپس طول هر نقطه روی این نمودار را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(2x+3)$ به‌دست آید. در نهایت قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور y رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(-2x+3)$ به‌دست آید.

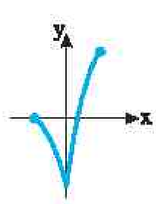
تست ۱۲ طول نقاط روی نمودار تابع f را نصف می‌کنیم و عرض آنها را دو برابر می‌کنیم. سپس نمودار را یک واحد به چپ می‌بریم و در آخر نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن رسم شده کدام است؟

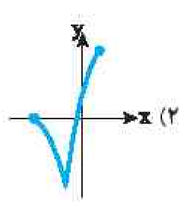
۱) $y=2f(2-2x)$ ۲) $y=2f(1-\frac{x}{2})$ ۳) $y=\frac{1}{2}f(2x+2)$ ۴) $y=\frac{1}{2}f(1-2x)$

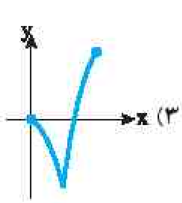
راه‌حل اگر طول نقاط روی نمودار تابع f را نصف کنیم، نمودار تابع $y=f(2x)$ رسم می‌شود و اگر عرض نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=2f(2x)$ رسم می‌شود. اگر نمودار اخیر را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=2f(2(x+1))$ رسم می‌شود. پس اکنون نمودار تابع $y=2f(2x+2)$ به‌دست آمده است که اگر آن را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=2f(-2x+2)$ به‌دست می‌آید.

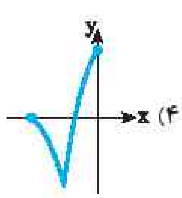
تست ۱۳ نمودار تابع $y=\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})$ به شکل مقابل است. نمودار تابع $y=f(x-1)$ کدام است؟



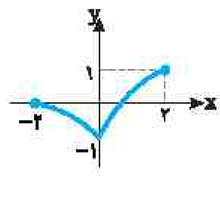
۱)


۲)


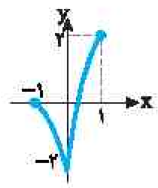
۳)


۴)


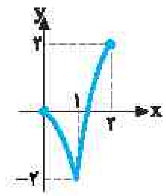
راه‌حل اگر طول نقاط نمودار تابع $y=\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})$ را نصف و عرض آنها را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=2(\frac{1}{2}f(\frac{2x}{2}))=f(x)$ به‌دست می‌آید. حال اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-1)$ به‌دست می‌آید.



$y=\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})$



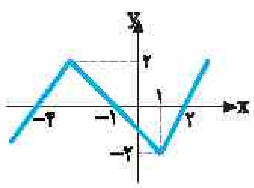
$y=f(x)$



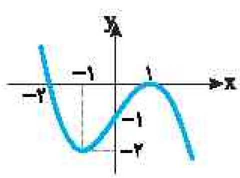
$y=f(x-1)$

تمرین

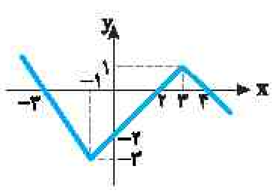
۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=-f(x)$ را رسم کنید.



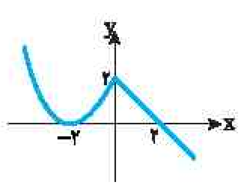
۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=-f(x)+|f(x)|$ را رسم کنید.



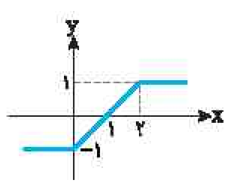
۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=-f(-x)$ را رسم کنید.



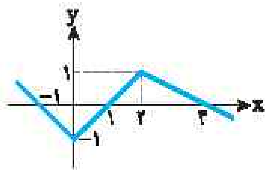
۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=f(-x-1)$ را رسم کنید.



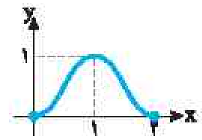
۵- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=\begin{cases}-f(x) & x<1\\ f(-x) & x\geq 1\end{cases}$ را رسم کنید.



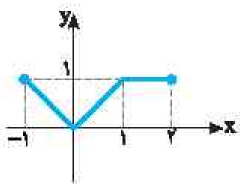
۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=f(۲x)$ را رسم کنید.



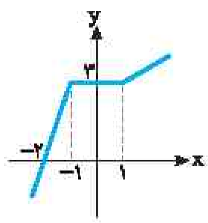
۷- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=f(-۲x)$ را رسم کنید.



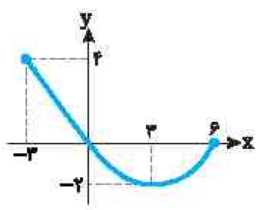
۸- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(-۲x-۱)$ را رسم کنید.



۹- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(|x|)$ را رسم کنید.



۱۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=\left|f(|x|-۱)\right|$ را رسم کنید.



۱۱- اگر تغییرات زیر را روی نمودار تابع f اعمال کنیم، ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست می‌آید چگونه خواهد بود؟

الف) نمودار تابع f را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم، سپس طول نقاط آن را نصف می‌کنیم.

ب) نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم، سپس طول و عرض نقاط آن را نصف می‌کنیم.

پ) نمودار تابع f را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم، سپس طول و عرض نقاط آن را دو برابر می‌کنیم.

۱۲- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم، سپس نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم و بعد آن را یک واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم، سپس طول و عرض نقاط این نمودار را دو برابر می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی را که نمودار آن رسم شده است به‌دست آورید.

نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید. (۱۹-۱۳)

۱۳- $f(x)=\dfrac{۱}{۲x+۱}$

۱۴- $f(x)=|\log(۱-x)|$

۱۵- $f(x)=\sqrt{x+|x|+۱}$

۱۶- $f(x)=\sqrt{|۲x-۱|}$

۱۷- $f(x)=-۲\sin(\frac{x}{۲})+۱,\quad D_f=[-\pi,\pi]$

۱۸- $f(x)=\cos(۲x-\frac{\pi}{۴}),\quad D_f=[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۴}]$

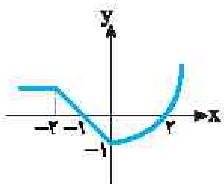
۱۹- $f(x)=\left|x^۲-۲|x|\right|$

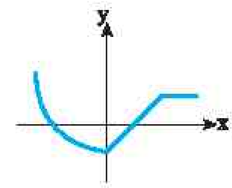
فصل اول

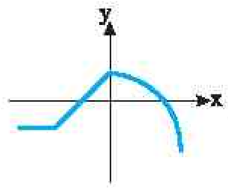
درس اول: تبدیل نمودار توابع

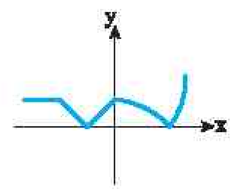
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

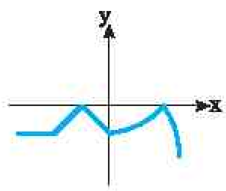
۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=-f(x)$ کدام است؟



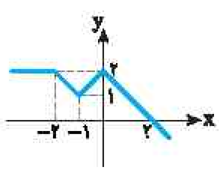
۱) 

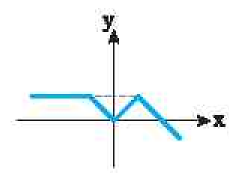
۲) 

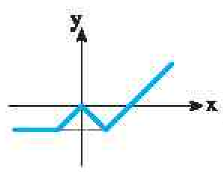
۳) 

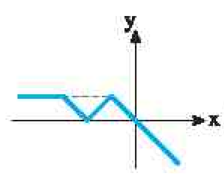
۴) 

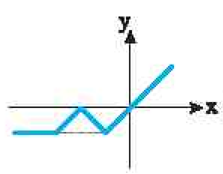
۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=1-f(x-1)$ کدام است؟



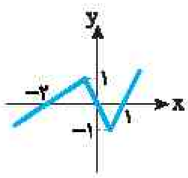
۱) 

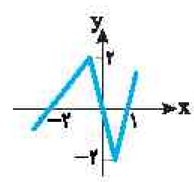
۲) 

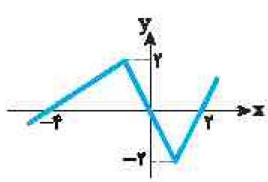
۳) 

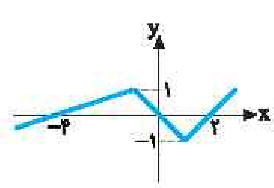
۴) 

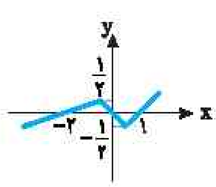
۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=2f(x)$ کدام است؟



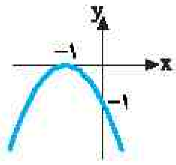
۱) 

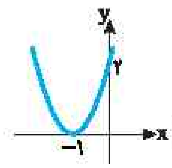
۲) 

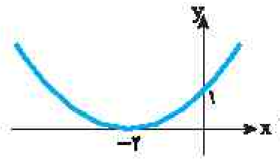
۳) 

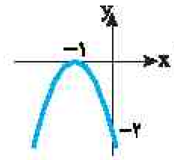
۴) 

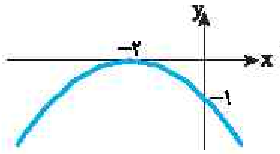
۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=|f(x)|-f(x)$ کدام است؟



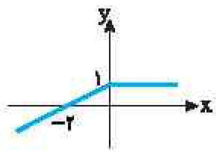
۱) 

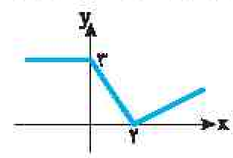
۲) 

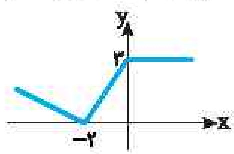
۳) 

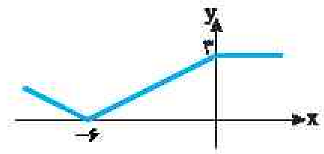
۴) 

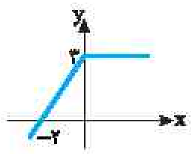
۵- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=2|f(x)|+f(x)$ کدام است؟



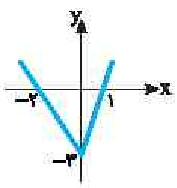
۱) 

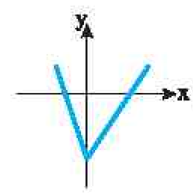
۲) 

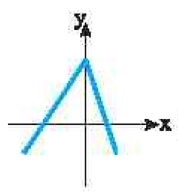
۳) 

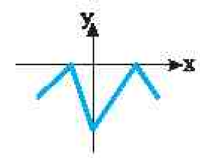
۴) 

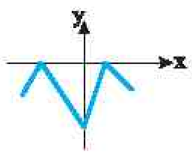
۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=-|f(x)|$ کدام است؟



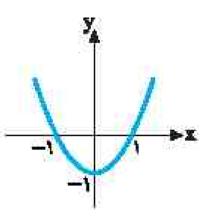
۱) 

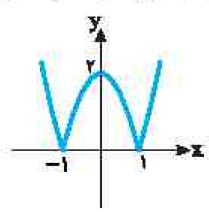
۲) 

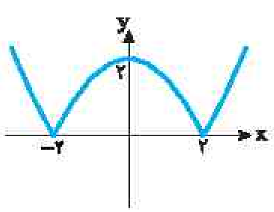
۳) 

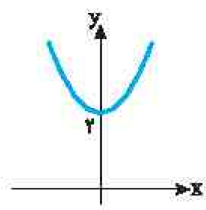
۴) 

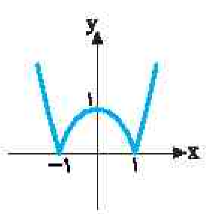
۷- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=2|f(x)|$ کدام است؟



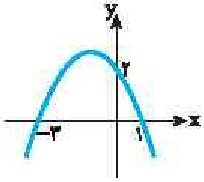
۱) 

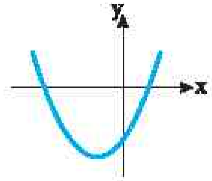
۲) 

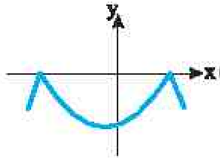
۳) 

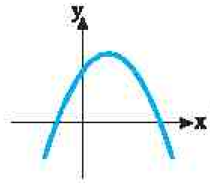
۴) 

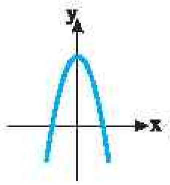
۸- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(-x)$ کدام است؟



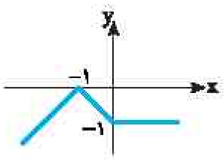
۱) 

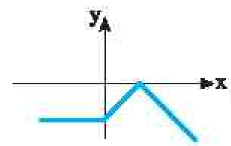
۲) 

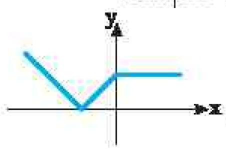
۳) 

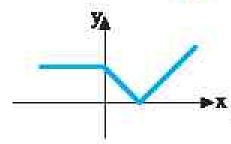
۴) 

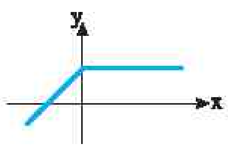
۹- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(-x)$ کدام است؟



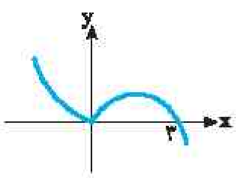
۱) 

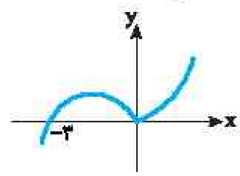
۲) 

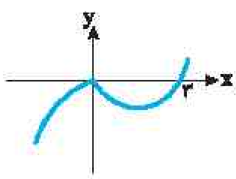
۳) 

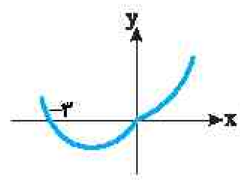
۴) 

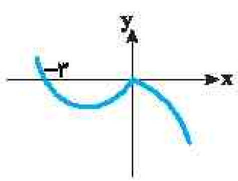
۱۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=-f(-x)$ کدام است؟



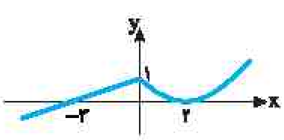
۱) 

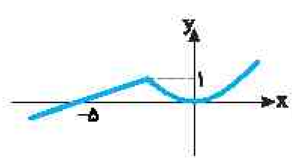
۲) 

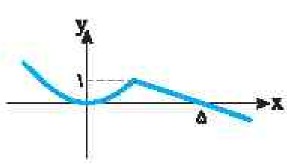
۳) 

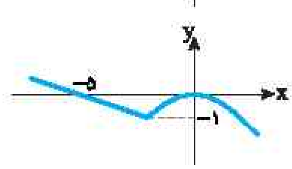
۴) 

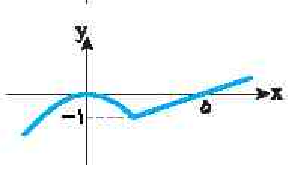
۱۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=f(2-x)$ کدام است؟



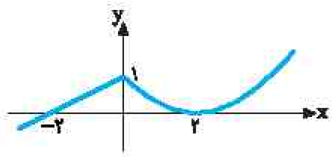
۱) 

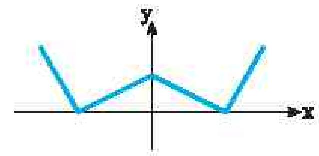
۲) 

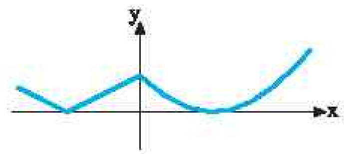
۳) 

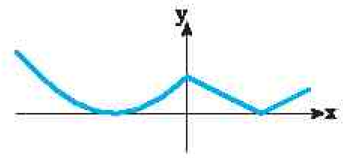
۴) 

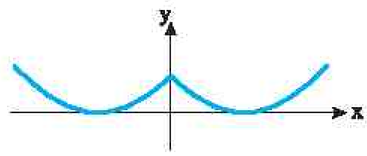
۱۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=|f(-x)|$ کدام است؟



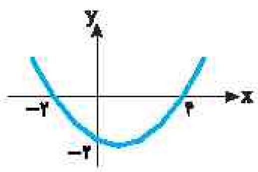
۱) 

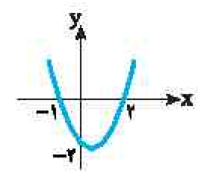
۲) 

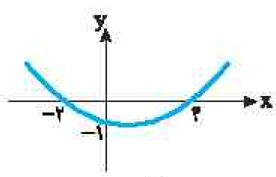
۳) 

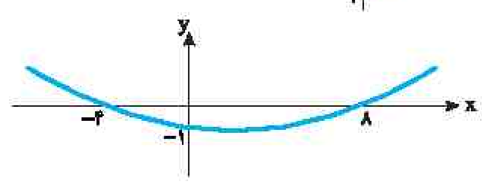
۴) 

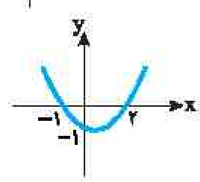
۱۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(2x)$ کدام گزینه است؟



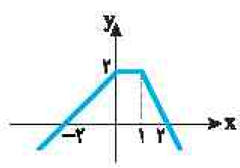
۱) 

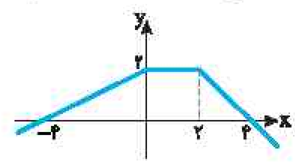
۲) 

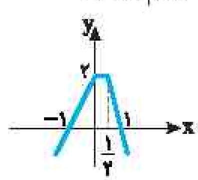
۳) 

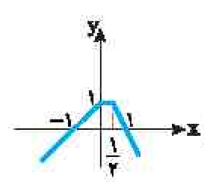
۴) 

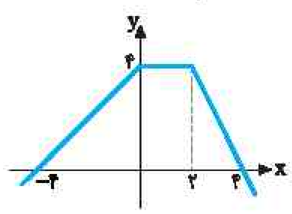
۱۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(\frac{1}{2}x)$ کدام است؟



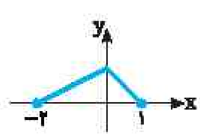
۱) 

۲) 

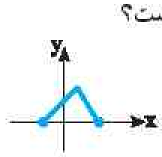
۳) 

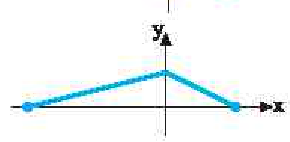
۴) 

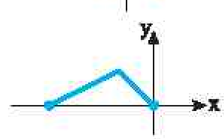
۱۵- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع $y=f(2x-1)$ کدام است؟



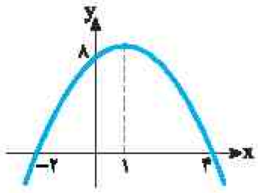
۱) 

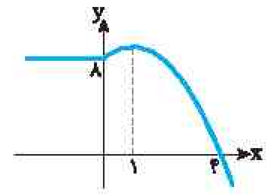
۲) 

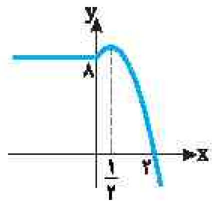
۳) 

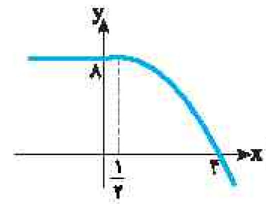
۴) 

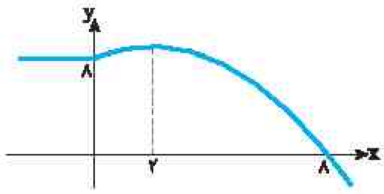
۱۶- شکل مقابل نمودار تابع f است. نمودار تابع $y=f(x+|x|)$ کدام است؟



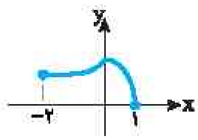
۱) 

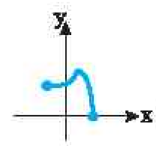
۲) 

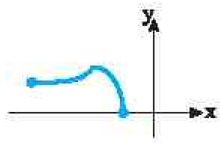
۳) 

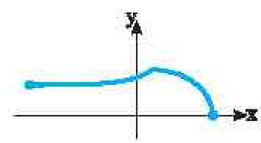
۴) 

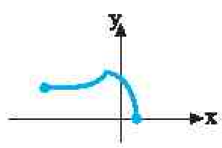
۱۷- نمودار تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ به شکل مقابل است. نمودار تابع $y=f(x-\frac{۱}{۲})$ کدام است؟



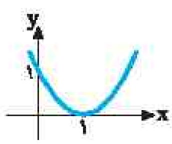
۱) 

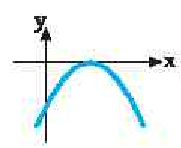
۲) 

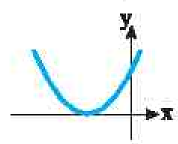
۳) 

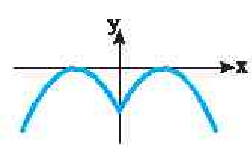
۴) 

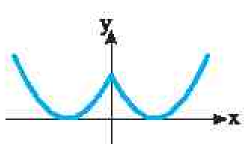
۱۸- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(|x|)$ کدام است؟



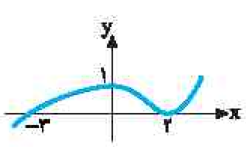
۱) 

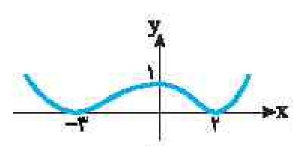
۲) 

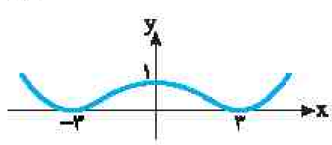
۳) 

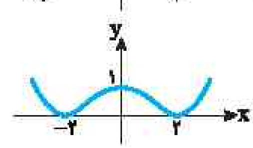
۴) 

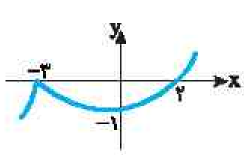
۱۹- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(|x|)$ کدام است؟



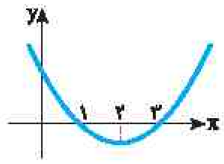
۱) 

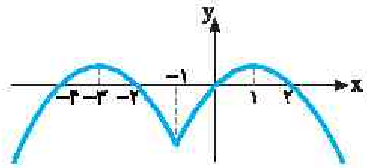
۲) 

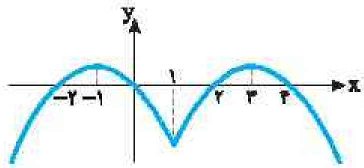
۳) 

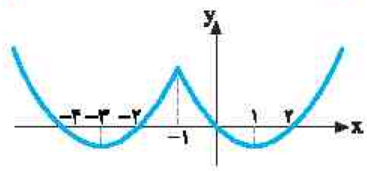
۴) 

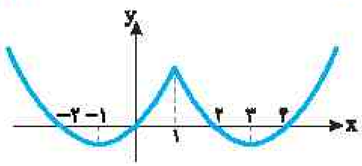
۲۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(|x-1|)$ کدام است؟



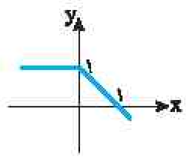
۱) 

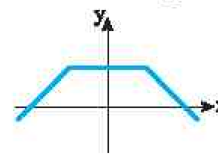
۲) 

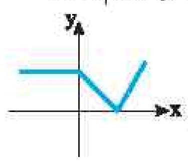
۳) 

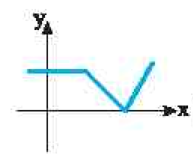
۴) 

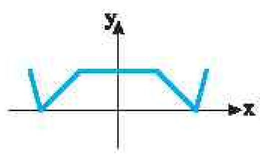
۲۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(|x|-1)$ کدام است؟



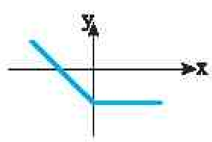
۱) 

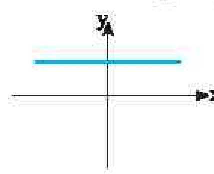
۲) 

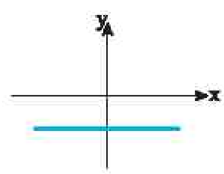
۳) 

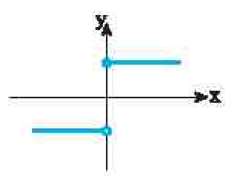
۴) 

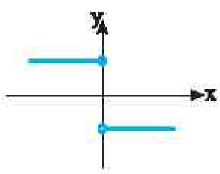
۲۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. اگر $g(x)=\begin{cases}|f(x)| & x\geq 0\\ f(|x|) & x<0\end{cases}$، نمودار تابع g کدام گزینه است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۳- نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم. سپس نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده کدام است؟

۱) $y=-f(x-1)-1$ ۲) $y=f(1-x)-1$ ۳) $y=f(1-x)+1$ ۴) $y=-f(1-x)+1$

۲۴- اگر نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، سپس عرض نقاط این نمودار را دو برابر و طول نقاط آن را نصف کنیم، نمودار تابع با کدام ضابطه به‌دست می‌آید؟

۱) $y=2f(\frac{x}{2}-1)$ ۲) $y=\frac{1}{2}f(\frac{x}{2}-1)$ ۳) $y=\frac{1}{2}f(2x-1)$ ۴) $y=2f(2x-1)$

۲۵- نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ و یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم. سپس در نمودار به‌دست آمده طول و عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده کدام است؟

۱) $y=2f(\frac{x}{2}+1)-1$ ۲) $y=2f(\frac{x}{2}+1)-2$ ۳) $y=2f(\frac{x+1}{2})-1$ ۴) $y=2f(\frac{x+1}{2})-2$

۲۶- نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=f(2x)-1$ را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. سپس طول نقاط این نمودار را نصف و عرض نقاط آن را دو برابر می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده کدام است؟

۱) $y=2f(4x-2)-1$ ۲) $y=2f(4x-2)-2$ ۳) $y=2f(4x-1)-1$ ۴) $y=2f(4x-1)-2$

۲۷- نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. سپس آن را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم و مجدداً نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده کدام است؟

۱) $y=\sqrt{x+۱}$ ۲) $y=\sqrt{x-۱}$ ۳) $y=\sqrt{-x-۱}$ ۴) $y=\sqrt{-x+۱}$

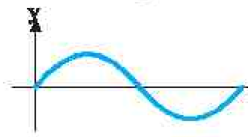
۲۸- طول نقاط نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x-۱}$ را سه برابر می‌کنیم و عرض نقاط را نصف می‌کنیم. سپس نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم و در آخر نمودار به‌دست آمده را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده کدام است؟

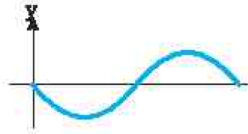
۱) $y=۲\sqrt{-۳x-۲}$ ۲) $y=۲\sqrt{-۳x+۲}$ ۳) $y=\frac{۱}{۲}\sqrt{-\frac{x}{۳}-\frac{۴}{۳}}$ ۴) $y=\frac{۱}{۲}\sqrt{-\frac{x}{۳}-\frac{۲}{۳}}$

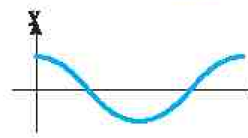
۲۹- نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sin(\frac{x}{۲})$ را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. سپس طول نقاط آن را نصف کرده و مجدداً آن را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم و در آخر نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده کدام است؟

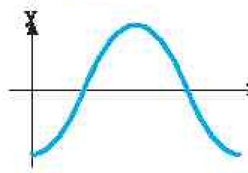
۱) $y=-\sin(x+\frac{۳}{۲})$ ۲) $y=-\sin(x-\frac{۱}{۲})$ ۳) $y=-\sin(\frac{x}{۴}-\frac{۳}{۸})$ ۴) $y=-\sin(\frac{x}{۴}+\frac{۵}{۸})$

۳۰- بخشی از نمودار تابع $y=-۲\cos x$ کدام است؟

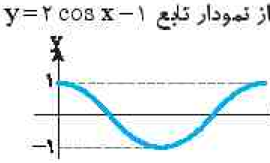
۱) 

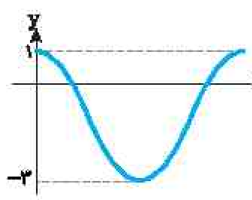
۲) 

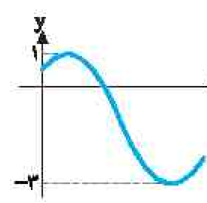
۳) 

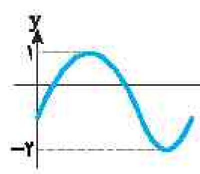
۴) 

۳۱- بخشی از نمودار تابع $y=۲\cos x-۱$ کدام است؟

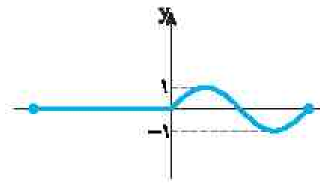
۱) 

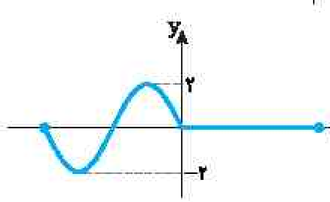
۲) 

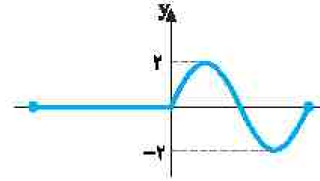
۳) 

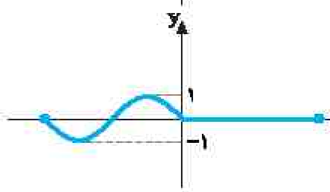
۴) 

۳۲- نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sin|x|+\sin x$ و دامنهٔ $[-۲\pi, ۲\pi]$ کدام است؟

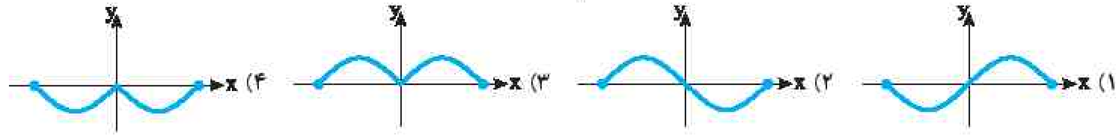
۱) 

۲) 

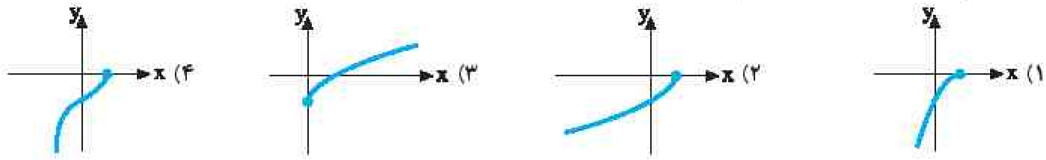
۳) 

۴) 

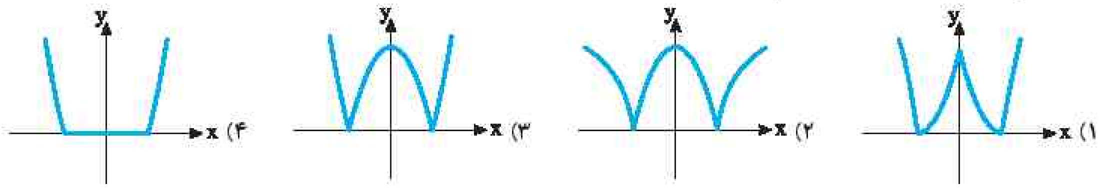
-۳۳ نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sin|x|$ و دامنهٔ $[-\pi, \pi]$ کدام است؟



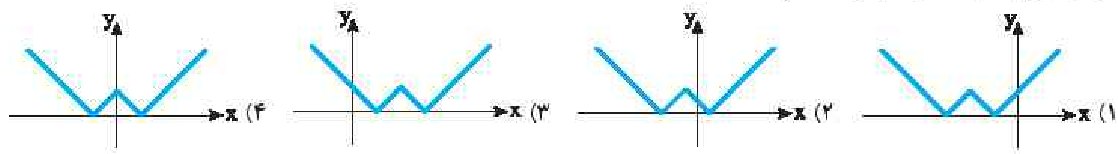
-۳۴ نمودار تابع $f(x)=-\sqrt{1-x}$ کدام است؟



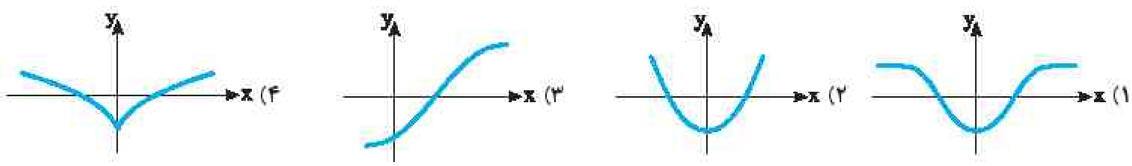
-۳۵ نمودار تابع $y=|x-2||x+2|$ کدام گزینه است؟



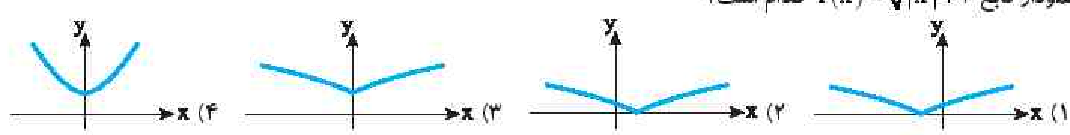
-۳۶ نمودار تابع $f(x)=\big||x+2|-1\big|$ کدام است؟



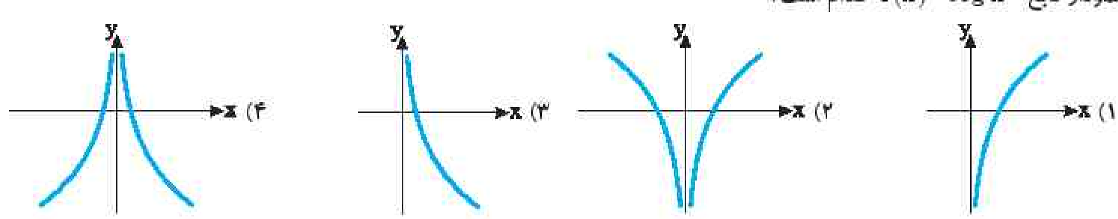
-۳۷ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{|x|}-1$ کدام است؟



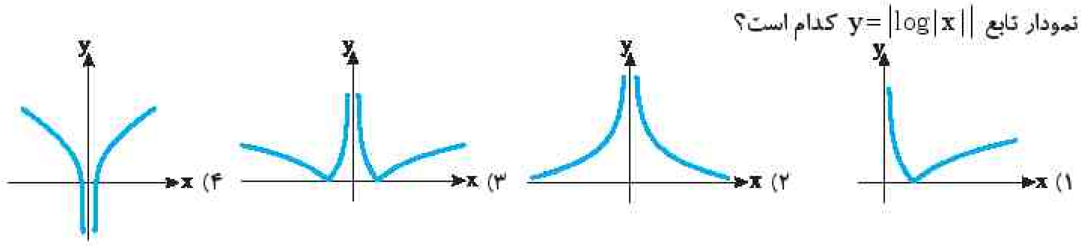
-۳۸ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{|x|+1}$ کدام است؟



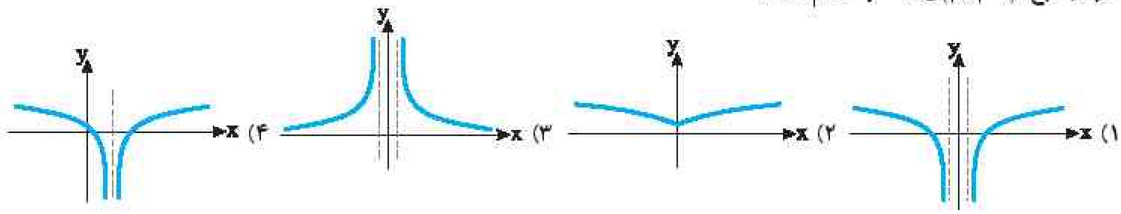
-۳۹ نمودار تابع $f(x)=\log x^2$ کدام است؟



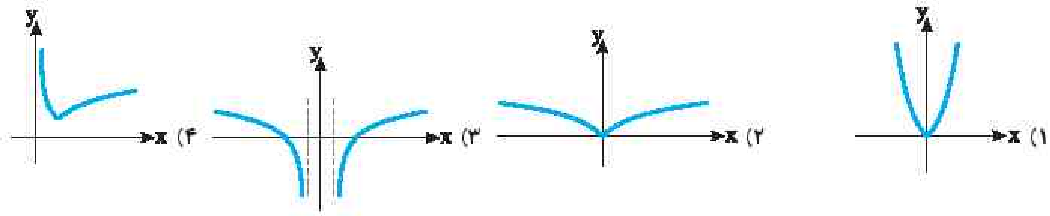
-۴۰ نمودار تابع $y=\big|\log|x|\big|$ کدام است؟



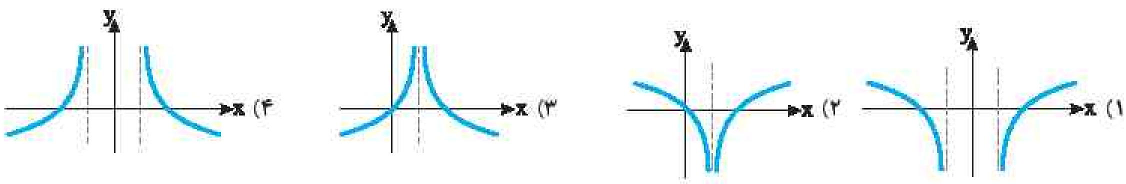
۴۱- نمودار تابع $y=\log(|x|-1)$ کدام است؟



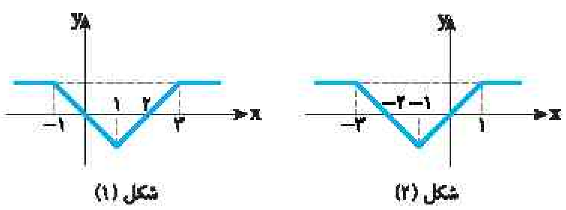
۴۲- نمودار تابع $y=\log(|x|+1)$ کدام است؟



۴۳- نمودار تابع $y=-\log|x-1|$ کدام است؟



۴۴- شکل (۱) نمودار تابع f است. شکل (۲) نمودار کدام تابع است؟



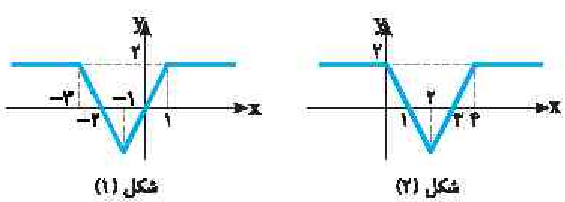
۱) $y=-f(x)$

۲) $y=f(-x)$

۳) $y=-f(-x)$

۴) $y=f(1-x)$

۴۵- شکل (۱) نمودار تابع f است. شکل (۲) نمودار کدام تابع است؟



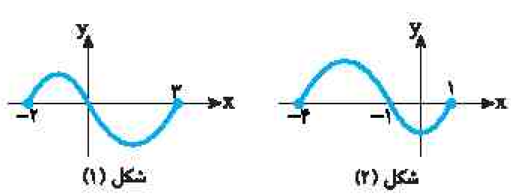
۱) $y=f(-x)$

۲) $y=-f(-x)$

۳) $y=f(-x-1)$

۴) $y=f(-x+1)$

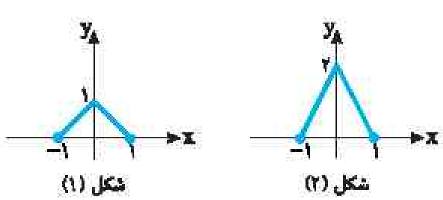
۴۶- نمودار تابع f در شکل (۱) رسم شده است. شکل (۲) نمودار کدام تابع است؟



۱) $y=-f(x-1)$ ۲) $y=-f(-x)$

۳) $y=-f(-x-1)$ ۴) $y=f(x-1)$

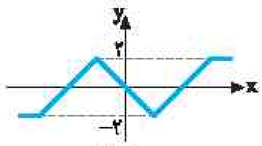
۴۷- نمودار تابع f به‌صورت شکل (۱) است. نمودار کدام تابع به‌صورت شکل (۲) است؟



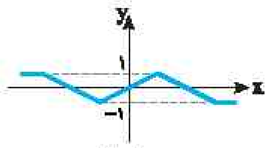
۱) $y=f(\frac{x}{2})$ ۲) $y=f(2x)$

۳) $y=2f(x)$ ۴) $y=\frac{1}{2}f(x)$

۴۸- شکل (۱) نمودار تابع f است. شکل (۲) نمودار کدام تابع است؟



شکل (۲)



شکل (۱)

۱) $y=2f(x)$ ۲) $y=-2f(x)$

۳) $y=-\frac{1}{2}f(-x)$ ۴) $y=-\frac{1}{2}f(x)$

۴۹- با کدام ضابطهٔ $f(x)$، همواره تساوی $(-1)^{[x]}f(x)=|f(x)|$ برقرار است؟ ریاضی - ۹۱

۱) $\sin \pi x$ ۲) $\cos \pi x$ ۳) $\sin 2\pi x$ ۴) $\cos 2\pi x$

۵۰- نمودار تابع $y=|\frac{1}{2}x|-2$ را، ۴ واحد به طرف xهای منفی و یک واحد به طرف yهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه، با کدام طول متقاطع‌اند؟ تجربی - ۹۳

۱) $-3/5$ ۲) -3 ۳) $-2/5$ ۴) -2

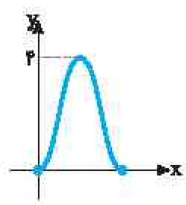
۵۱- نمودار تابع با ضابطهٔ $y=x^2-3x-10$ را حداقل چند واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x غیرمنفی باشد؟ خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۲- قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور y تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه‌های اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ خارج از کشور تجربی - ۹۷

۱) -2 ۲) ۰/۵ ۳) ۱ ۴) ۱/۵

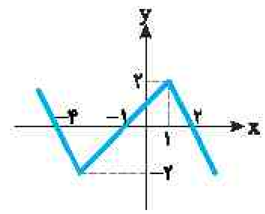
۵۳- شکل مقابل نمودار تابع $y=a+b\cos(\frac{\pi}{2}x)$ در بازهٔ $[0, 4]$ است. مقدار b کدام است؟ ریاضی - ۹۷



۱) -2
۲) -1
۳) ۱
۴) ۲

راه‌حل تمرین‌ها

۱ کافی است نمودار تابع f را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم.



۲ ابتدا توجه کنید که اگر $f(x)\ge 0$، آن‌گاه

$$|f(x)|=f(x)$$

و در نتیجه

$$g(x)=-f(x)+f(x)=0$$

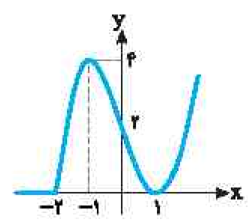
و اگر $f(x)\le 0$، آن‌گاه

$$|f(x)|=-f(x)$$

و در نتیجه

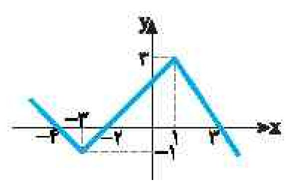
$$g(x)=-f(x)-f(x)=-2f(x)$$

بنابراین در بازهٔ $(-2,+\infty)$ باید نمودار تابع $y=-2f(x)$ را رسم کنیم و برای $x\in(-\infty,-2]\cup\{1\}$ باید نمودار تابع $y=0$ را رسم کنیم.



$y=-f(x)+|f(x)|$

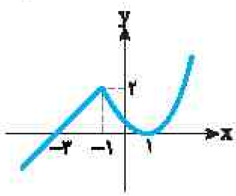
۳ کافی است نمودار تابع f را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، سپس این نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم.



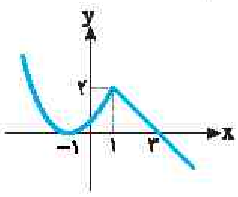
$y=-f(-x)$

۴ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-1)$ به‌دست آید. سپس این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع زیر به‌دست آید:

$$y=f(-x-1)$$

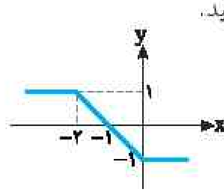


$y=f(-x-1)$

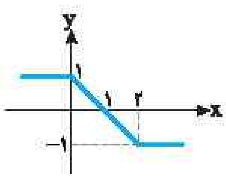


$y=f(x-1)$

۵ ابتدا به نمودار توابع $y=-f(x)$ و $y=f(-x)$ توجه کنید.

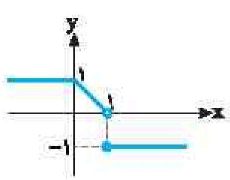


$y=f(-x)$

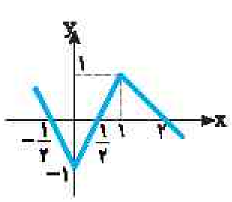


$y=-f(x)$

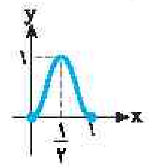
اکنون در بازهٔ $[1,+\infty)$ نمودار تابع $y=f(-x)$ و در بازهٔ $(-\infty,1)$ نمودار تابع $y=-f(x)$ را رسم می‌کنیم تا نمودار تابع g به‌دست آید.



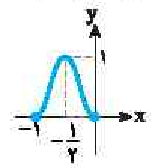
۶ کافی است طول نقاط نمودار تابع f را نصف کنیم تا نمودار تابع $y=f(2x)$ به‌دست آید.



۷ ابتدا طول هر نقطه روی نمودار تابع f را نصف می‌کنیم تا نمودار $y=f(۲x)$ به‌دست آید، سپس این نمودار را نسبت به محور y قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(-۲x)$ به‌دست آید.

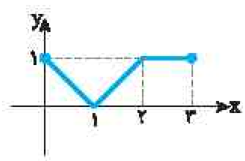


$y=f(۲x)$

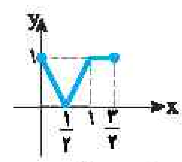


$y=f(-۲x)$

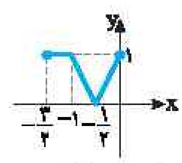
۸ ابتدا نمودار $y=f(x)$ را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار $y=f(x-۱)$ به‌دست آید، سپس طول هر نقطه روی این نمودار را نصف می‌کنیم تا نمودار $y=f(۲x-۱)$ به‌دست آید، در نهایت قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور y رسم می‌کنیم تا نمودار $y=f(-۲x-۱)$ به‌دست آید.



$y=f(x-۱)$

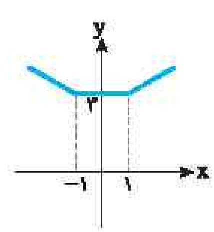


$y=f(۲x-۱)$

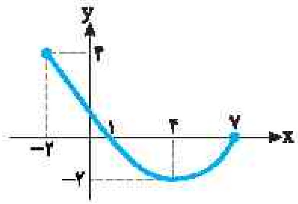


$y=f(-۲x-۱)$

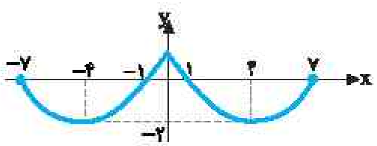
۹ برای رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$، قسمتی از نمودار f را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و به‌جای آن قرینهٔ قسمتی را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم می‌کنیم.



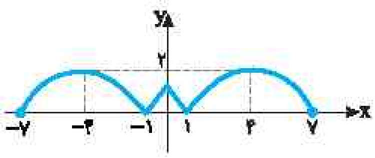
۱۰ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-۱)$ به‌دست آید. اکنون قسمتی از این نمودار را که سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارد حذف می‌کنیم و به جای آن قرینهٔ قسمتی که سمت راست محور عرض‌ها قرار دارد نسبت به این محور رسم می‌کنیم. بدین ترتیب نمودار تابع $y=f(|x|-۱)$ به‌دست می‌آید. در نهایت قسمتی از این نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|f(|x|-۱)|$ به‌دست آید.



$y=f(x-۱)$



$y=f(|x|-۱)$



$y=|f(|x|-۱)|$

۱۱ در هر مورد ضابطهٔ تابع مورد نظر را می‌نویسیم:

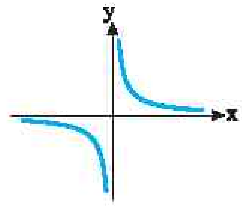
الف) $y=f(-۲x)$

ب) $y=\frac{۱}{۲}f(۲x-۱)$

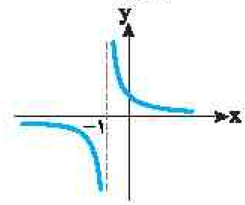
پ) $y=۲f(\frac{x}{۲})+۲$

۱۲ اگر نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{x-۱}$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{-x-۱}$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار این تابع را یک واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{-(x+۱)-۱}+۱$ به‌دست می‌آید. بنابراین تا اینجا نمودار تابع $y=\sqrt{-x-۲}+۱$ رسم شده است. اگر در نمودار این تابع طول و عرض نقاط را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=۲(\sqrt{-(\frac{x}{۲})-۲}+۱)$ به‌دست می‌آید. پس ضابطهٔ تابعی که نمودار آن رسم شده است به‌صورت $y=۲\sqrt{-\frac{x}{۲}-۲}+۲$ است.

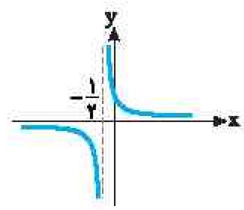
۱۳ ابتدا نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را رسم می‌کنیم و آن را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\frac{۱}{x+۱}$ به‌دست آید. اکنون طول نقاط نمودار به‌دست آمده را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۲x+۱}$ به‌دست آید.



$y=\frac{۱}{x}$

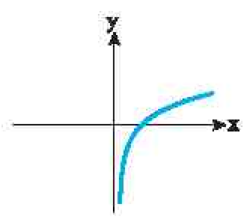


$y=\frac{۱}{x+۱}$

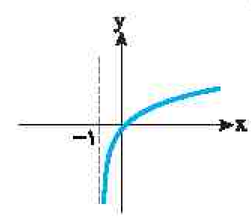


$f(x)=\frac{۱}{۲x+۱}$

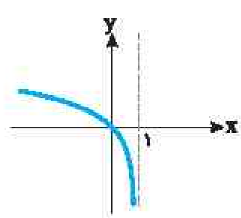
۱۴ ابتدا نمودار تابع $y=\log x$ را رسم می‌کنیم و آن را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\log(x+۱)$ به‌دست آید. اکنون این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\log(-x+۱)$ به‌دست آید. در نمودار به‌دست آمده، قسمتی را که زیر محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x)=|\log(۱-x)|$ به‌دست آید.



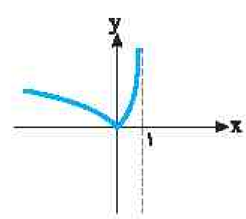
$y=\log x$



$y=\log(x+۱)$



$y=\log(-x+۱)$

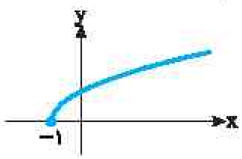


$f(x)=|\log(۱-x)|$

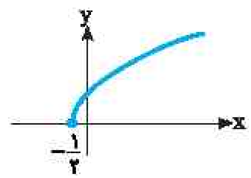
۱۵ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+x+۱} & x\geq ۰\\ \sqrt{x-x+۱} & x\leq ۰\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{۲x+۱} & x\geq ۰\\ ۱ & x\leq ۰\end{cases}$$

بنابراین ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{۲x+۱}$ را به این ترتیب رسم می‌کنیم: نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم، سپس طول نقاط آن را نصف می‌کنیم.

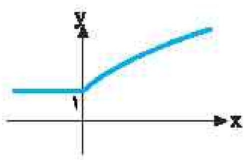


$y=\sqrt{x+۱}$



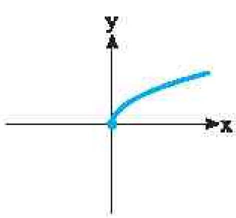
$y=\sqrt{۲x+۱}$

اکنون نمودار تابع f را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم.

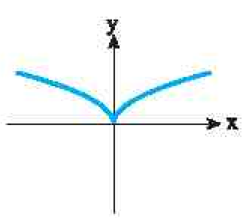


$f(x)=\sqrt{x+|x|+۱}$

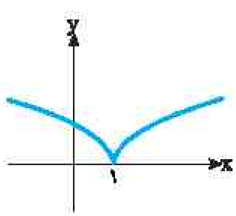
۱۶ ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را رسم می‌کنیم. سپس قرینهٔ این نمودار نسبت به محور عرض‌ها را نیز به آن اضافه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{|x|}$ به‌دست آید. اکنون نمودار به‌دست آمده را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{|x-۱|}$ به‌دست آید. در آخر طول نقاط روی نمودار به‌دست آمده را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x)=\sqrt{|۲x-۱|}$ به‌دست آید.



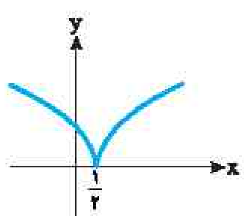
$y=\sqrt{x}$



$y=\sqrt{|x|}$



$y=\sqrt{|x-۱|}$



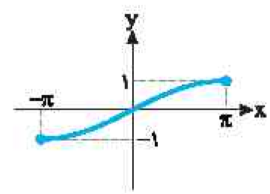
$f(x)=\sqrt{|۲x-۱|}$

۱۷ ابتدا توجه کنید که

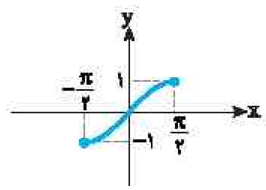
$$-\pi \le x \le \pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \frac{x}{2} \le \frac{\pi}{2}$$

پس نمودار تابع $y=\sin x$ را در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ رسم می‌کنیم. سپس طول نقاط این نمودار را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sin(\frac{x}{2})$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ به‌دست آید. اگر عرض نقاط این نمودار را دو برابر کنیم و نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-2\sin(\frac{x}{2})$ به‌دست می‌آید. اکنون این نمودار را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع زیر به‌دست آید:

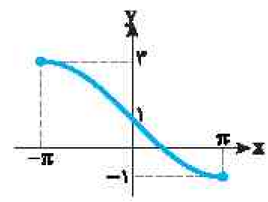
$$f(x)=-2\sin(\frac{x}{2})+1$$



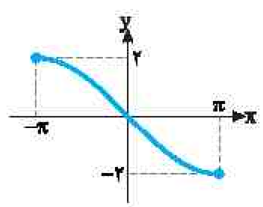
$y=\sin(\frac{x}{2})$



$y=\sin x$



$f(x)=-2\sin(\frac{x}{2})+1$



$y=-2\sin(\frac{x}{2})$

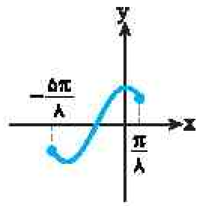
۱۸ ابتدا توجه کنید که

$$-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{4} \Rightarrow -\pi \le 2x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{5\pi}{4} \le 2x-\frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{4}$$

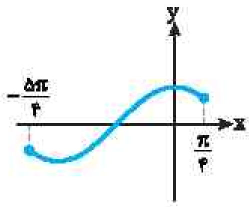
راه‌حل اول ابتدا نمودار تابع $y=\cos x$ را در بازهٔ $[-\frac{5\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ رسم می‌کنیم. سپس طول نقاط این نمودار را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\cos 2x$ در بازهٔ $[-\frac{5\pi}{8},\frac{\pi}{8}]$ به‌دست آید.

اکنون این نمودار را $\frac{\pi}{8}$ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع زیر در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}]$ به‌دست آید:

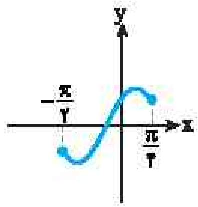
$$f(x)=\cos(2(x-\frac{\pi}{8}))$$



$y=\cos 2x$

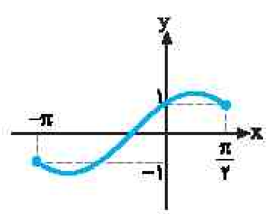


$y=\cos x$

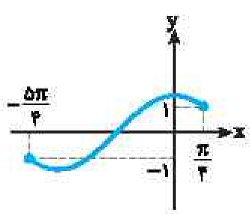


$f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{4})$

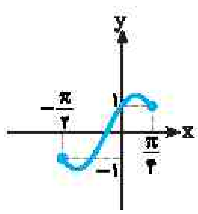
راه‌حل دوم ابتدا نمودار تابع $y=\cos x$ را در بازهٔ $[-\frac{5\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ رسم می‌کنیم. سپس نمودار را $\frac{\pi}{4}$ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\cos(x-\frac{\pi}{4})$ در بازهٔ $[-\pi,\frac{\pi}{2}]$ به‌دست آید. اکنون طول نقاط این نمودار را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{4})$ در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}]$ به‌دست آید.



$y=\cos(x-\frac{\pi}{4})$



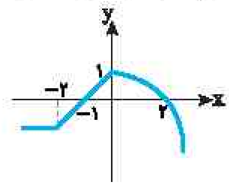
$y=\cos x$



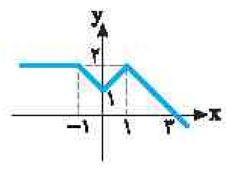
$f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{4})$

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

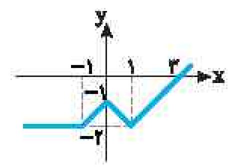
۱- گزینهٔ ۲ برای رسـم کردن نمـودار تابع $y=-f(x)$ باید قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور x رسم کنیم.



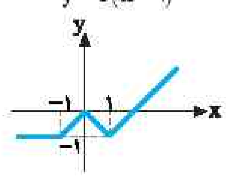
۲- گزینهٔ ۲ ابتـدا نمـودار تابع f را یک واحد به سـمت راسـت انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=f(x-1)$ به‌دسـت بیاید. اکنون قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(x-1)$ به‌دسـت بیایـد. در آخر، این نمـودار را یک واحـد به بالا انتقـال می‌دهیم تا نمـودار تابع $y=1-f(x-1)$ به‌دست بیاید.



$y=f(x-1)$

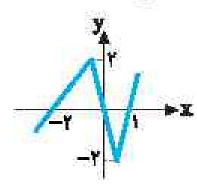


$y=-f(x-1)$



$y=1-f(x-1)$

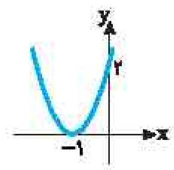
۳- گزینهٔ ۱ باید عرض هر نقطه روی نمودار تابع f را در ۲ ضرب کنیم تا نمودار تابع $y=2f(x)$ به‌دست بیاید.



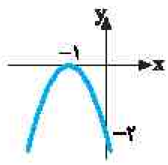
۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که همواره $f(x)\leq 0$. بنابراین

$$y=|f(x)|-f(x)=-f(x)-f(x)=-2f(x)$$

برای رسـم کردن نمـودار $y=-2f(x)$، ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار f را در ۲ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=2f(x)$ به‌دسـت بیاید. سـپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-2f(x)$ به‌دست بیاید.



$y=-2f(x)$

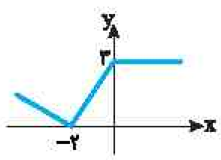


$y=2f(x)$

۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$g(x)=\begin{cases}2f(x)+f(x) & f(x)\geq 0\\ -2f(x)+f(x) & f(x)<0\end{cases}=\begin{cases}3f(x) & f(x)\geq 0\\ -f(x) & f(x)<0\end{cases}$$

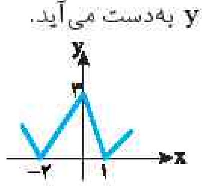
بنابرایـن، در جاهایـی که مقادیر f نامنفی‌انـد باید نمودار تابع $y=3f(x)$ را رسـم کنیم و در جاهایی کـه مقادیر f منفی‌اند باید نمودار تابع $y=-f(x)$ را رسم کنیم.



$y=2|f(x)|+f(x)$

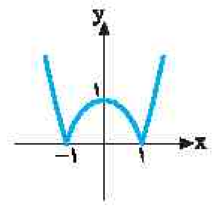
۶- گزینهٔ ۴ ابتدا نمودار تابع $y=|f(x)|$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینهٔ قسـمتی را که زیر محور x است نسبت به محور x رسـم می‌کنیم، سپس قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم. اکنون، اگر نمودار تابع $|f|$ را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-|f(x)|$ به‌دست می‌آید.

$y=-|f(x)|$

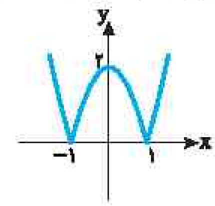


$y=|f(x)|$

۷- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=|f(x)|$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینهٔ قسمتی را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم، سپس قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم. اکنون، نمودار تابع $|f|$ را در امتداد محور y با ضریب ۲ به‌طور عمودی منبسط می‌کنیم تا نمودار تابع $y=2|f(x)|$ به‌دست بیاید.

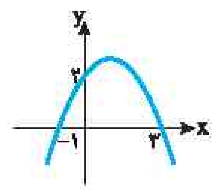


$y=|f(x)|$

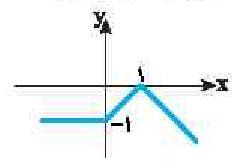


$y=2|f(x)|$

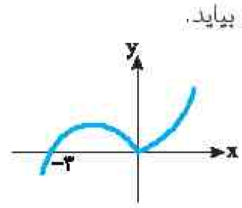
۸- گزینهٔ ۳ باید قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور y رسم کنیم تا نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست بیاید.



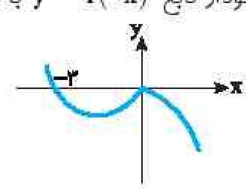
۹- گزینهٔ ۱ باید قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور y رسم کنیم تا نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست بیاید.



۱۰- گزینهٔ ۴ ابتدا قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور y رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ نمودار این تابع را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(-x)$ به‌دست بیاید.

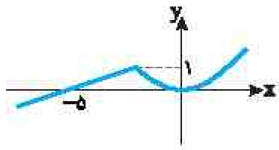


$y=f(-x)$

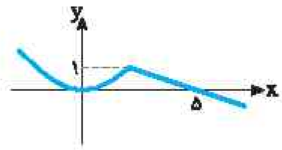


$y=-f(-x)$

۱۱- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع f را ۲ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=f(2+x)$ به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور y رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(2-x)$ به‌دست بیاید.

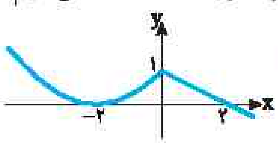


$y=f(2+x)$

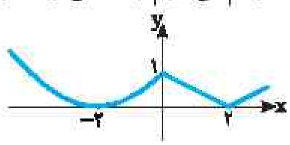


$y=f(2-x)$

۱۲- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع $y=f(-x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینهٔ نمودار f را نسبت به محور y رسم می‌کنیم. اکنون، برای رسم کردن نمودار تابع $y=|f(-x)|$، قرینهٔ قسمتی از نمودار تابع $y=f(-x)$ را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.

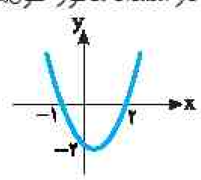


$y=f(-x)$

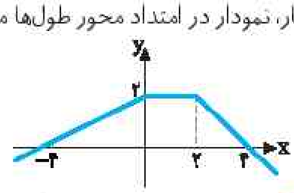


$y=|f(-x)|$

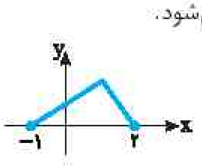
۱۳- گزینهٔ ۱ باید طول هر نقطه روی نمودار تابع f را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم تا نمودار تابع $y=f(2x)$ به‌دست بیاید. توجه کنید که با این کار نمودار در امتداد محور طول‌ها منقبض می‌شود.



۱۴- گزینهٔ ۱ باید طول هر نقطه از نمودار تابع f را در $\frac{1}{\frac{1}{2}}$، یعنی ۲، ضرب کنیم تا نمودار تابع $y=f(\frac{1}{2}x)$ به‌دست بیاید. توجه کنید که با این کار، نمودار در امتداد محور طول‌ها منبسط می‌شود.



۱۵- گزینهٔ ۲ برای رسم نمودار تابع $y=f(2x-1)$ کافی است ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-1)$ رسم شود. سپس در نمودار اخیر طول نقاط را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(2x-1)$ به‌دست آید. توجه کنید که با این کار نمودار در راستای محور طول‌ها منقبض می‌شود.



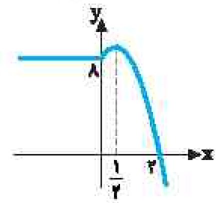
$y=f(x-1)$

$y=f(2x-1)$

۱۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

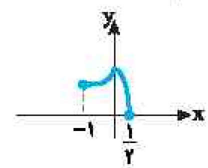
$$y=\begin{cases} f(x+x) & x\geq 0 \\ f(x-x) & x<0 \end{cases}=\begin{cases} f(2x) & x\geq 0 \\ f(0) & x<0 \end{cases}$$

بنابراین باید روی بازهٔ $[0,+\infty)$ نمودار تابع $y=f(2x)$ را رسم کنیم. یعنی باید روی بازهٔ $[0,+\infty)$ طول هر نقطه روی نمودار f را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم. با این کار نمودار f روی این بازه در امتداد محور طول‌ها منقبض می‌شود. نمودار تابع مورد نظر روی بازهٔ $(-\infty,0)$ خط ثابت $y=f(0)=8$ است.

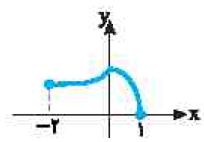


$y=f(x+|x|)$

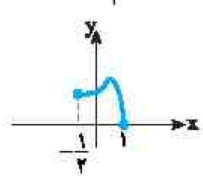
۱۷- گزینهٔ ۱ اگر طول نقاط نمودار تابع $y=f(\frac{x}{2})$ را نصف کنیم، نمودار تابع $y=f(\frac{2x}{2})=f(x)$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را نیم واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-\frac{1}{2})$ رسم می‌شود.



$y=f(x)$

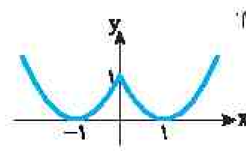


$y=f(\frac{x}{2})$



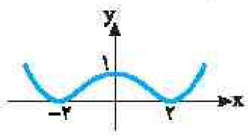
$y=f(x-\frac{1}{2})$

۱۸- گزینهٔ ۴ برای رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$، قسمتی از نمودار تابع f را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینهٔ قسمتی را که سمت راست محور y است نسبت به این محور رسم می‌کنیم.



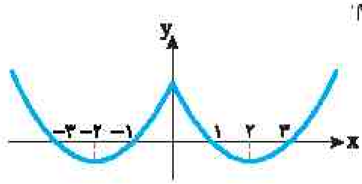
$y=f(|x|)$

۱۹- گزینهٔ ۳ برای رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$، قسمتی از نمودار تابع f را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینهٔ قسمتی را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم می‌کنیم.

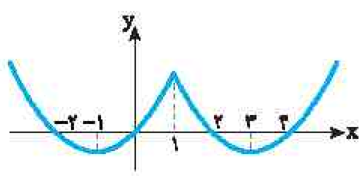


$y=f(|x|)$

۲۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر ابتدا نمودار تابع $y=f(|x|)$ را رسم کنیم، سپس آن را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم نمودار تابع $y=f(|x-1|)$ به‌دست می‌آید. برای رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$ کافی است قسمتی از نمودار تابع f را که سمت چپ محور y است حذف کنیم و قرینهٔ قسمتی را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم کنیم.

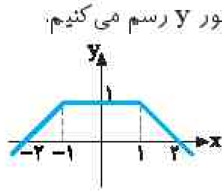


$y=f(|x|)$

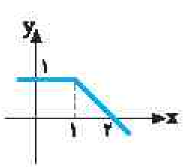


$y=f(|x-1|)$

۲۱- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $g(x)=f(x-1)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. اکنون نمودار تابع $y=g(|x|)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قسمتی را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینهٔ قسمت سمت راست را نسبت به محور y رسم می‌کنیم.



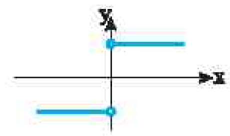
$y=f(|x|-1)$



$y=f(x-1)$

۲۲- گزینهٔ ۳ اگر $x\ge 0$، آن‌گاه $g(x)=|f(x)|$، بنابراین، باید به‌ازای $x\ge 0$ نمودار تابع $y=|f(x)|$ را رسم کنیم. برای این کار، به‌ازای $x\ge 0$، قرینهٔ قسمتی از نمودار f را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.

اگر $x<0$، آن‌گاه $g(x)=f(|x|)$، بنابراین، باید به‌ازای $x<0$ نمودار تابع $y=f(|x|)$ را رسم کنیم. برای این کار، به‌ازای $x<0$، قسمتی از نمودار f را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینهٔ قسمتی از نمودار f را که سمت راست محور y است نسبت به این محور رسم می‌کنیم.



۲۳- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x+1)$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را یک واحد به سمت بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x+1)+1$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار اخیر را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-x+1)+1$ به‌دست می‌آید.

۲۴- گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-1)$ به‌دست می‌آید. اگر عرض نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=2f(x-1)$ به‌دست می‌آید و اگر طول نقاط نمودار اخیر را نصف کنیم، نمودار تابع $y=2f(2x-1)$ به‌دست می‌آید.

۲۵- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ و یک واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x+1)-1$ به‌دست می‌آید. اگر طول نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=f(\frac{x}{2}+1)-1$ به‌دست می‌آید و اگر عرض نقاط نمودار اخیر را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=2(f(\frac{x}{2}+1)-1)$ به‌دست می‌آید. پس ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده به‌صورت $y=2f(\frac{x}{2}+1)-2$ است.

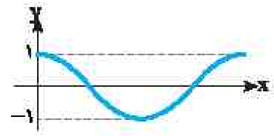
۲۶- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $g(x)=f(2x)-1$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(2(x-1))-1$ به‌دست می‌آید. اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=f(2(2x-1))-1=f(4x-2)-1$ به‌دست می‌آید و اگر عرض نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=2(f(4x-2)-1)$ به‌دست می‌آید. پس ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده به‌صورت $y=2f(4x-2)-2$ است.

۲۷- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{-x}$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار به‌دست آمده را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{-(x-1)}$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را مجدداً نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{-(-x-1)}$ به‌دست می‌آید. بنابراین نمودار نهایی متعلق به تابع $y=\sqrt{x+1}$ است.

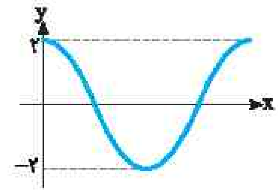
۲۸- گزینهٔ ۴ وقتی طول نقاط نمودار تابع $y=\sqrt{x-1}$ را سه برابر می‌کنیم نمودار تابع $y=\sqrt{\frac{x}{3}-1}$ رسم می‌شود و وقتی عرض نقاط این نمودار را نصف می‌کنیم نمودار تابع $y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{3}-1}$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{x}{3}-1}$ به‌دست می‌آید و اگر نمودار اخیر را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(x-1)}{3}-1}$ به‌دست می‌آید. بنابراین ضابطهٔ تابعی که نمودار آن رسم شده است به‌صورت $y=\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{x}{3}-\frac{2}{3}}$ است.

۲۹- گزینهٔ ۱ وقتی نمودار تابع $y=\sin(\frac{x}{2})$ را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم نمودار تابع $y=\sin(\frac{x-1}{2})$ به‌دست می‌آید. اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=\sin(\frac{2x-1}{2})$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار یک واحد به‌سمت راست منتقل شود، نمودار تابع $y=\sin(\frac{2(x-1)-1}{2})$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=\sin(\frac{2(-x-1)-1}{2})$ به‌دست می‌آید که پس از ساده کردن به‌صورت $y=\sin(-x-\frac{3}{2})$ یا به‌صورت $y=-\sin(x+\frac{3}{2})$ در می‌آید.

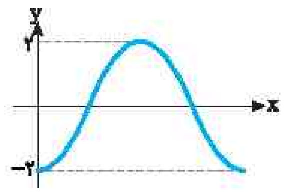
۳۰- گزینهٔ ۴ نمودار تابع $y=-۲\cos x$ از دو برابر کردن عرض نقاط در نمودار تابع $y=\cos x$ و سـپس قرینه کردن آنها نسبت به محور x به‌دست می‌آید.



$y=\cos x$

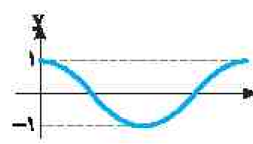


$y=۲\cos x$

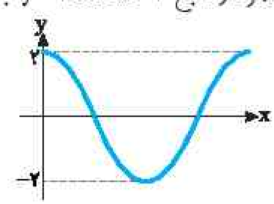


$y=-۲\cos x$

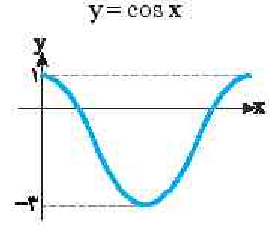
۳۱- گزینهٔ ۲ ابتـدا عرض نقاط نمودار تابع $y=\cos x$ را دو برابـر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۲\cos x$ به‌دسـت آید. نمودار به‌دسـت آمده را یک واحد بـه پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۲\cos x-۱$ به‌دست آید.



$y=\cos x$



$y=۲\cos x$

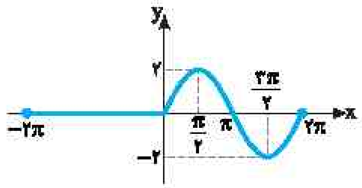


$y=۲\cos x-۱$

۳۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}\sin(-x)+\sin x & -۲\pi\leq x<۰\\ \sin x+\sin x & ۰\leq x\leq ۲\pi\end{cases}=\begin{cases}۰ & -۲\pi\leq x<۰\\ ۲\sin x & ۰\leq x\leq ۲\pi\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع روی بازهٔ $[-۲\pi,۰)$ خط ثابت $y=۰$ است، و روی بازهٔ $[۰,۲\pi]$ نمودار تابع $y=۲\sin x$ است. برای رسم نمودار تابع $y=۲\sin x$ روی بازهٔ $[۰,۲\pi]$ باید عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y=\sin x$ را در ۲ ضرب کنیم.



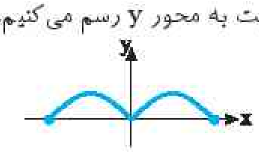
$y=\sin|x|+\sin x$

۳۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

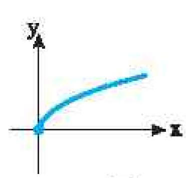
$$f(x)=\begin{cases}\sin(-x) & -\pi\leq x<۰\\ \sin x & ۰\leq x\leq\pi\end{cases}=\begin{cases}-\sin x & -\pi\leq x<۰\\ \sin x & ۰\leq x\leq\pi\end{cases}$$

بنابراین، باید روی بـازهٔ $[-\pi,۰)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=\sin x$ را نسبت به محور x رسم کنیم که نمودار تابع $y=-\sin x$ روی این بازه می‌شود و روی بازهٔ $[۰,\pi]$ نمودار تابع $y=\sin x$ را رسم کنیم.

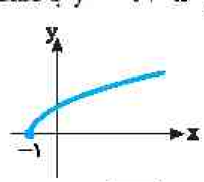
راه‌حل دوم ابتدا نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=\sin x$ و دامنهٔ $[-\pi,\pi]$ را رسم می‌کنیم. اکنون توجه کنید که $f(x)=g(|x|)$، در نتیجه، کافی اسـت نمودار تابع $y=g(|x|)$ را رسم کنیم. برای این کار، قسمتی از نمودار تابع g را که سمت چپ محور y اسـت حذف می‌کنیم و قرینهٔ قسـمتی را که سـمت راست محور y است نسبت به محور y رسم می‌کنیم.



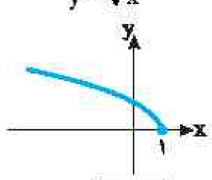
۳۴- گزینهٔ ۲ ابتـدا نمودار تابـع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x+۱}$ به‌دست آید. سـپس ایـن نمودار را نسـبت به محـور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{-x+۱}$ به‌دسـت آید و در آخر این نمودار را نسـبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-\sqrt{۱-x}$ به‌دست آید.



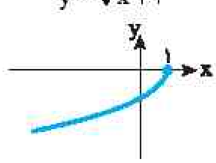
$y=\sqrt{x}$



$y=\sqrt{x+۱}$



$y=\sqrt{-x+۱}$



$y=-\sqrt{۱-x}$